

Uwagi dotyczące list 6, 7, 8.

Lista 6:

zad 7. Pomocna jest następująca obserwacja: dla miary skończonej μ , jeżeli z dowolnego podciągu g_{n_i} ciągu funkcji g_n można wybrać podciąg $g_{n_{i_k}}$ zbieżny p.w. do g to $g_n \xrightarrow{\mu} f$. Załóżmy, nie wprost, że g_n nie zbiega do g wg. μ . Wtedy istnieją $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ oraz podciąg n_i , takie że,

$$\mu(\{|f - f_{n_i}| > \epsilon\}) > \delta.$$

Biorąc $A_i = \{|f - f_{n_i}| > \epsilon\}$ pokażemy, że dla $B = \limsup_i A_i = \{x : x \in A_i \text{ dla nieskończenie wielu } i\}$ zachodzi $\mu(B) \geq \delta$. Rzeczywiście, jeżeli byłoby to nieprawdą to $\mu(B) \leq \delta - \epsilon'$ dla pewnego $\epsilon' > 0$. Ponadto, z ciągłości miary, istniałby M taki że dla $B_M = \{x : x \in A_i \text{ dla co najmniej } M \text{ indeksów } i\}$ zachodziłoby $\mu(B_M) \leq \mu(B) + \epsilon'/2 \leq \delta - \epsilon'/2$. Wtedy $\mu(A_i \setminus B_M) \geq \epsilon'/2$ i dla funkcji $F(x) = \sum_i \chi_{A_i \setminus B_M}(x)$ zachodziłoby

$$\infty = \sum_i \epsilon'/2 \leq \sum_i \mu(A_i \setminus B_M) = \int F d\mu \leq \int M d\mu \leq M\mu(X) < \infty.$$

Powyższa sprzeczność pokazuje, że zbiór B ma dodatnią miarę a zauważmy, że na zbiorze B żaden podciąg $f_{n_{i_k}}$ nie może zbiegać punktowo do f (bo $|f(x) - f_{n_i}(x)| > \epsilon$). Jest to sprzeczne z założeniem.

Lista 7:

zad 8. Powinno być $\frac{1}{t} \int |f| d\mu$

Lista 8:

zad 6. Powinno być $|g_n| \leq f_n$

zad 11. "...jednostajnie ciągle."