

Dla niezależnych zmiennych $X_i \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i)$ zachodzi $\sum_i X_i$ jest zbieżny wtw gdy $\sum_i m_i$ oraz $\sum_i \sigma_i^2$ są zbieżne.

Dowód. $\Leftarrow$:

Wynika wprost z twierdzenia Kołmogorowa o 2 szeregach ($\text{var}(X_i) = \sigma_i^2$, $\mathbb{E}X_i = m_i$)

$\Rightarrow$:

Założmy, że $Y = \sum_i X_i$ jest szeregiem zbieżnym. Wtedy jego funkcja charakterystyczna

$$\phi_Y(t) = \prod_i \phi_{X_i}(t) = \prod_i (e^{itm_i} e^{-t^2 \sigma_i^2 / 2}) = e^{it \sum_i m_i} e^{-t^2 / 2 \sum_i \sigma_i^2},$$

jest ciągła w 0 a więc $|\phi_Y(t_0)| \geq 1/2$ dla pewnego $t_0 > 0$. Stąd $1/2 \leq e^{-t_0^2 / 2 \sum_i \sigma_i^2}$, więc w szczególności $\sum_i \sigma_i^2 < \infty$.

Chcemy jeszcze pokazać, że $\sum_i m_i$ jest również zbieżny. Zauważmy, że $\text{var}(X_i - m_i) = \sigma_i^2$ oraz $\mathbb{E}(X_i - m_i) = 0$ stąd, na mocy kryterium o 2 szeregach, $\sum_i (X_i - m_i)$ jest p.n. zbieżny. Wówczas

$$\sum_i m_i = \sum_i (m_i - X_i) + \sum_i X_i$$

jako suma szeregów zbieżnych jest zbieżny. □