

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NOTATKI Z WYKŁADU 2.B

Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^2$, parze $(x, y) \in D$ przyporządkowuje liczbę $f(x, y)$.
Jej wykresem jest zbiór

$$\{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in D\},$$

inaczej pisząc:

$$\{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in D\}.$$

Wykres jest podzbiorem Jego rzut na płaszczyznę $z = 0$ jest 'równy'
Zbiór $f[D]$, zawarty w , jest rzutem wykresu na

* * *

1. Niech $f(x, y) = x^2 - y + 2$.

a) Oblicz: $f(2, 3) = \dots\dots\dots$, $f(3, 2) = \dots\dots\dots$, $f(x, 0) = \dots\dots\dots$,

$$f(1, y) = \dots\dots\dots,$$

$$f(2x + y, 3x) = \dots\dots\dots,$$

$$f(x, -x) = \dots\dots\dots$$

b) Rozwiąż równania. Co one mówią o wykresie f ?

(i) $f(x, 4) = 0$,

(ii) $f(4, y) = 0$,

(iii) $f(x, x) = 0$,

(iv) $f(y, y) = 1$

Z (i) wynika, że prosta przecina wykres w

Z (ii) wynika, że

Z (iii) wynika, że

Z (iv) wynika, że

c) Zaznacz w (jednym) układzie współrzędnych następujące zbiory:

$$A = \{(x, y) : f(x, y) = 0\},$$

$$B = \{(x, y) : f(x, y) = \frac{1}{2}\},$$

$$C = \{(x, y) : f(x, y) = 1\}.$$

Jak je zgrabniej oznaczyć?

c') Zaznacz w (jednym) układzie współrzędnych następujące zbiory:

$$A = \{(x, z) : z = f(x, y), y = 0, x \in \mathbb{R}\},$$

$$B = \{(x, z) : z = f(x, \frac{1}{2})\},$$

$$C = \{(x, f(x, 1)) : x \in \mathbb{R}\} .$$

Jak je zgrabniej oznaczyć?

d) Następujące zbiory leżą na płaszczyznach. Narysuj je (płaszczyzny i zbiory).

$$A = \{(x, y, z) : z = f(x, y) \wedge y = 1\},$$

$$B = \{(x, 2, f(x, 2)) : x \in \mathbb{R}\},$$

$$C = \{(2, y, z) : z = f(2, y)\},$$

$$D = \{(x, y, z) : z = f(x, y) \wedge y = x + 1\},$$

$$E = \{(x, y, f(x, y)) : x = 1\},$$

$$F = \{(x, x, z) : z = f(x, x)\}$$

2. Jak wyglądają wykresy funkcji: $f(x, y) = x^2$, $g(x, y) = x^2 - y$, $h(x, y) = x^3 - x$?

Przykład. Dla $f(x, y) = xy$ cięcie wykresu płaszczyzną $y = \dots$ jest prostą nachyloną do płaszczyzny $z = 0$ pod kątem $\pi/4$, a dla cięcia $y = -\sqrt{3}$ jest prostą nachyloną do płaszczyzny $z = 0$ pod kątem \dots . Cięcia wykresu płaszczyznami $x = c$ są również prostymi: $\{(c, y, z) : z = cy, y \in \mathbb{R}\}$. Zatem wykres jest sumą (nieskonńczoną) prostych – powierzchnia $z = xy$ jest przykładem powierzchni *prostokreślnej*.

Nie oznacza to, że dla każdej płaszczyzny (prostopadłej do pł. $z = 0$) przecięcie wykresu jest prostą, np. \dots .

Również poziomice nie są prostymi; dla $s \in \mathbb{R}_+$

$$P_s = \{(x, y) : f(x, y) = s\} = \{(x, y) : \dots = s\} = \{(x, y) : y = s \cdot \frac{1}{\dots}\},$$

czyli są to \dots . Dla pozostałych s też otrzymujemy \dots (z wyjątkiem $s = \dots$, gdzie dostajemy sumę \dots).

* * *

UMOWA. Jeśli podano wzór funkcji $f = f(x, y)$, ale jawnie nie podano dziedziny, to przyjmujemy, że dziedziną są **wszystkie** pary $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dla których wzór ma sens.

Na przykład:

- $f(x, y) = \frac{\sqrt{xy}}{\ln x}$ ma dziedzinę $D_f = \mathbb{R}_+^2 \setminus (\{1\} \times \mathbb{R}) = ((0, +\infty) \setminus \{1\}) \times (0, +\infty)$.
- $g(x, y, z) = \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1-z^2}}$ ma dziedzinę $D_g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1, |z| < 1\}$
inaczej: $D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\} \times (-1, 1)$, (walec bez obu podstaw)

3. Opisz (i naskicuj) obszar będący dziedziną funkcji:

a) $f(x, y) = \ln(xy)$

b) $g(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}$

SYMETRIE WYKRESÓW (NIEKTÓRYCH) FUNKCJI

(i) Dla $g(x, y) = \sin(x + |y|)$ mamy: $g(x, y) = g(x, -y)$, dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
 Pary punktów wykresu $(x, y, g(x, y))$, $(x, -y, g(x, -y))$ leżą symetrycznie względem płaszczyzny $y = 0$ (OXZ); ta płaszczyzna jest płaszczyzną symetrii wykresu g .
 Korzystać z tego taka, że 'wystarczy zrozumieć' część wykresu, dla par z $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ – resztę 'zobaczymy w lustrze'.

(ii) Dla $f(x, y) = (x - 3)^2 + y$ mamy:
 $f(2, 5) = f(4, 5)$, $f(-1, c) = f(7, c)$, $f(5, d) = f(\dots, d)$, $f(3 + h, y) = f(3 \dots, y)$.
 Widać, że **parę** punktów wykresu: $(3 + h, y, f(3 + h, y))$, $(3 - h, y, f(3 - h, y))$ 'oglądają się w lustrze' $x = 3$, czyli wykres f ma płaszczyznę symetrii $x = 3$.

(iii) Niech h będzie taka, że $h(x, y) = h(8 - x, y)$, dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Mamy:
 $h(2, 5) = h(\dots, 5)$, $h(\dots, c) = h(9, c)$, $h(\pi, d) = h(\dots, d)$, $h(\dots + s, y) = h(\dots - s, y)$.
 Zatem **parę** punktów: $(\dots + s, y, h(\dots + s, y))$, $(\dots - s, y, h(\dots - s, y))$ 'oglądają się w lustrze' $\dots = \dots$, czyli wykres h ma płaszczyznę symetrii $\dots = \dots$.

(iv) Para punktów $(2, 1, 5)$, $(-2, -1, 5)$ leży symetrycznie względem osi OZ, również para $(\pi, -3, 7)$, $(\dots, \dots, 7)$ oraz (x, \dots, z) , $(\dots, 4, \dots)$.
 Oś OZ jest osią symetrii wykresu $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \iff f(x, y) = f(\dots, \dots)$, dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

(v) Niech $L = \{(a, b)\} \times \mathbb{R}$ (prosta przechodząca przez punkty $(a, b, 0)$, $(a, b, 1)$).
 L jest osią symetrii wykresu $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \iff f(x, y) = f(\dots, \dots)$, dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

UWAGA.

Oś OZ nie jest osią symetrii wykresu funkcji $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$, bo

(vi) Wykres $g(x, y) = 4 - |x| - |y|$ ma wiele symetrii: np.:

(vi) Jeszcze więcej ma wykres $h(x, y) = 4 - |x^2| - y^2$. Ile?

4. Dobierz odpowiednią funkcję (i jej dziedzinę) tak, by jej wykres wyglądał jak:

a) trójkąt o wierzchołkach $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 8)$

b) powierzchnia boczna stożka o wysokości $(0,0,0)(0,0,2)$ i promieniu podst. = 5

e) dach dwuspadzisty domu 8×10 o wysokości 7

f) pół powierzchni piłki do rugby

g) wigwam

h) blacha falista

g) wulkan

5. Niech $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Niektóre z poniższych napisów nie mają sensu – które?

$f(g(x, y), y)$, $f(g(x, y), g(x, y))$, $f(g(x), g(y))$, $g(f(g(x, y), x), x)$, $g(f(x + 1, y) + x)$