

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NOTATKI Z WYKŁADU 4A

DEF. Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^2$. Pochodne cząstkowe f w punkcie $(x_0, y_0) \in D$ określamy wzorami:

$$f'_x(x_0, y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}, \quad f'_y(x_0, y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Inne oznaczenia: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

PRZYKŁAD A. Dla $f(x, y) = x^4 y^3 + \sin(xy^2)$ mamy

$$f'_x(\pi, 1) = (4x^3 y^3 + \cos(xy^2) \cdot y^2) \Big|_{\substack{x=\pi \\ y=1}} = 4\pi^3 \cdot 1 + \cos(\pi) \cdot 1^2 = 4\pi^3 \dots \dots ,$$

$$f'_y(\pi, 1) = (3x^4 y^2 + \cos(xy^2) \cdot 2xy) \Big|_{\substack{x=\pi \\ y=1}} = 3\pi^4 + \cos(\pi) \cdot 2\pi = 3\pi^4 - 2\pi.$$

PRZYKŁAD A'. Dla $g(x, y, z) = x^4 y^3 + xz$ mamy

$$g'_x(\pi, 1, e) = (\dots) \Big|_{\substack{x=\pi \\ y=1 \\ z=e}} = \dots, \quad g'_y(\pi, 1, e) = \dots, \quad g'_z(\pi, 1, e) = \dots$$

PRZYKŁAD B. Dla funkcji $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

w punkcie $(0, 0)$ (obliczamy z definicji):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} = +\infty, \text{ więc } f'_x(0, 0) \text{ nie istnieje,}$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{0^2+h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

a w punktach $(x, y) \neq (0, 0)$ liczymy ze wzorów:

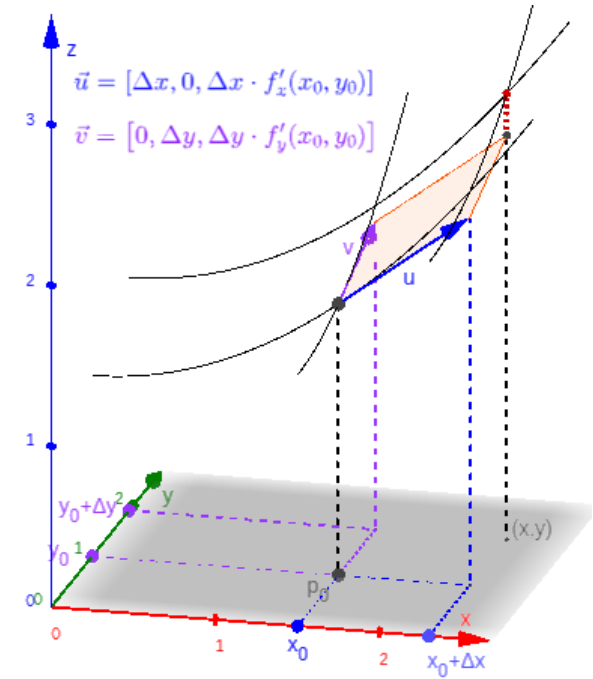
$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{x^2+y^2} = x \cdot (-1)(x^2+y^2)^{-2} \cdot 2y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

PRZYKŁAD C. Funkcja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^4+y^4} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

ma w każdym punkcie obie pochodne cząstkowe, bowiem:

- dla punktu $(0, 0)$: obie pochodne cząstkowe są równe 0, bo:
 - zauważamy, że f obcięte do osi OX jest funkcją stałą (=0); tak samo dla osi OY;
- w punktach $(x, y) \neq (0, 0)$ można obliczyć pochodne cząstkowe ze wzorów.

Uwaga: funkcja ta ma wszędzie obie pochodne cząstkowe ale nie jest ciągła (sprawdź).



PRZYKŁAD D. Niech $f(x, y) = \begin{cases} 2y & \text{gdy } (x, y) \in [0, 2] \times [0, 2] \\ 2 & \text{gdy } (x, y) \notin [0, 2] \times [0, 2] \end{cases}$

Funkcja f ma wszędzie, poza brzegiem kwadratu $K = [0, 2] \times [0, 2]$, obie pochodne cząstkowe.

Na brzegu K :

.....

.....

Zatem dziedziną f'_x jest zbiór,

a dziedziną f'_y jest zbiór

* * *

Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ma ciągle pochodne cząstkowe w pewnym otoczeniu p-ktu (x_0, y_0) .

Równanie

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

określa *płaszczyznę styczną* do f w punkcie (x_0, y_0) .

Zachodzi:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

czyli wartości f są 'niezłe' przybliżane przez wartości bardzo prostej funkcji.

Jakość (dokładność) tego przybliżenia będziemy omawiać w przyszłości (za Taylorem).

PRZYKŁAD. Funkcja $f(x, y) = x^3 + y^4$ ma w punkcie $(x_0, y_0) = (2, 1)$ płaszczyznę styczną o równaniu

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

$$z = 2^3 + 1^4 + (3 \cdot 2^2 + 0) \cdot (x - 2) + (0 + 4 \cdot 1^3) \cdot (y - 1),$$

$$z = 9 + 12(x - 2) + 4(y - 1),$$

$$z = 12x + 4y - 19.$$

PRZYKŁAD. Znaleźć płaszczyznę P , na której leżą punkty $A_1 = (3, 0, 5)$, $A_2 = (3, 1, 6)$, styczną do powierzchni $x^2 + y^2 + z = 4$.