

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NOTATKI Z WYKŁADU 6A

DEF. Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ i $p_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$. Mówimy, że

f osiąga (ma) w p_0 lokalne maksimum, gdy $\exists \delta > 0 \forall_{p \in D, |p-p_0| < \delta} f(p) \leq f(p_0)$,

f osiąga (ma) w p_0 lokalne minimum, gdy $\exists \delta > 0 \forall_{p \in D, |p-p_0| < \delta} f(p) \geq f(p_0)$.

UWAGA. Przy TEJ definicji funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2$ ma w $p_0 = (1, 4)$ zarówno maksimum lokalne, jak i minimum lokalne!

PRZYKŁAD 0. Funkcja $f(x, y) = \begin{cases} 3 - |x| & \text{gdy } (x, y) \neq (0, 0) \\ p & \text{gdy } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

dla $p = 1$ ma w $(0, 0)$ lokalne , (Jakie wziąć δ w definicji? Odp. $\delta \dots$)
 Dla $p = 5$ ma w $(0, 0)$ lokalne , (Jakie wziąć δ w definicji? Odp. $\delta \dots$)

Ogólnie:

- dla $p \in \mathbb{R}$ ma w każdym punkcie zbioru $\{0\} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ maksimum lokalne, ponadto:
- dla $p \geq \dots$ ma w $(0, 0)$ maksimum lokalne,
- dla $p < \dots$ ma w $(0, 0)$ minimum lokalne.

TW. Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ osiąga lokalne ekstremum w $p_0 = (x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Jeśli istnieje $f'_x(p_0)$, to jest równa 0.

Jeśli istnieje $f'_y(p_0)$, to jest równa 0.

DOWÓD. Wystarczy zbadać obcięcia: $f|_{(\mathbb{R} \times \{y_0\}) \cap D}$ i $f|_{(\{x_0\} \times \mathbb{R}) \cap D}$.

WNIOSEK. Gdy $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ma wszędzie obie pochodne cząstkowe, to może mieć ekstremum lokalne tylko w punktach spełniających układ równań $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$.

PRZYKŁAD 1. Dla $f(x, y) = x^3 - x + y^3$ mamy $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - 1 = 0 \\ \dots = 0 \end{cases} \dots$
 czyli **jeśli** f ma ekstremum lokalne, **to** jedynie w którymś z punktów $p_1 = (\dots, \dots)$, $p_2 = (\dots, \dots)$ (albo w obu). **NA RAZIE** wiemy tylko/aż tyle.



TWIERDZENIE.

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ będzie klasy \mathcal{C}^2 w otoczeniu $p_0 = (x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ oraz $f'_x(p_0) = 0$ i $f'_y(p_0) = 0$. Niech $H := \det \begin{pmatrix} f''_{xx}(p_0) & f''_{yx}(p_0) \\ f''_{xy}(p_0) & f''_{yy}(p_0) \end{pmatrix}$ (zwany hesjanem). Wtedy:

- jeśli $H > 0$ i $f''_{xx}(p_0) > 0$, to f osiąga minimum lokalne w p_0 ,
- jeśli $H > 0$ i $f''_{xx}(p_0) < 0$, to f osiąga maksimum lokalne w p_0 ,
- jeśli $H < 0$, to f nie ma ekstremum lokalnego w p_0 ,

Jeśli $H=0$, to twierdzenie to **nie rozstrzyga**, czy f ma ekstremum lokalne w p_0 .

Dowód. (idea) Zajmiemy się tylko przypadkiem: $H < 0$.

Znak różnicy wartości:

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= f'_x \cdot (x - x_0) + f'_y \cdot (y - y_0) + R_2 = \quad (\text{z Tw. Taylora}) \\ &= 0 + R_2 = \quad (\text{bowiem}) \\ &= \frac{1}{2} (f''_{xx} \cdot (x - x_0)^2 + 2f''_{yx} \cdot (x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy} \cdot (y - y_0)^2) = \\ &= \frac{1}{2} (y - y_0)^2 \left(f''_{xx} \cdot \left(\frac{x - x_0}{y - y_0} \right)^2 + 2f''_{yx} \cdot \left(\frac{x - x_0}{y - y_0} \right) + f''_{yy} \right) \end{aligned}$$

zależy od znaku wyrażenia w nawiasie, które jest 'prawie funkcją kwadratową' zmiennej $\left(\frac{x - x_0}{y - y_0} \right)$. Wyróżnik (Δ) tej 'prawie funkcji kwadratowej' jest równy

$$(2 \cdot f''_{xy})^2 - 4 \cdot f''_{xx} \cdot f''_{yy} = -4(f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2) = -4 \det \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = -4H > 0.$$

Dla (x, y) bliskich (x_0, y_0) owa 'zmienna' $\left(\frac{x - x_0}{y - y_0} \right)$ przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste. (Np.: dla $(x, y) = (x_0 + \frac{\pi}{n}, y_0 + \frac{1}{n})$ owa 'zmienna' ma wartość) Zatem ta 'prawie funkcja kwadratowa' przyjmuje wartości i dodatnie, i ujemne. Czyli znak różnicy $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ dla pewnych (x, y) jest dodatni, a dla innych - ujemny.

Zatem w pobliżu (x_0, y_0) są:

- zarówno punkty (x, y) , w których wartości $f(x, y) > f(x_0, y_0)$,
- jak i punkty (x, y) , w których wartości $f(x, y) < f(x_0, y_0)$.

Stąd f nie ma ekstremum lokalnego w (x_0, y_0) .

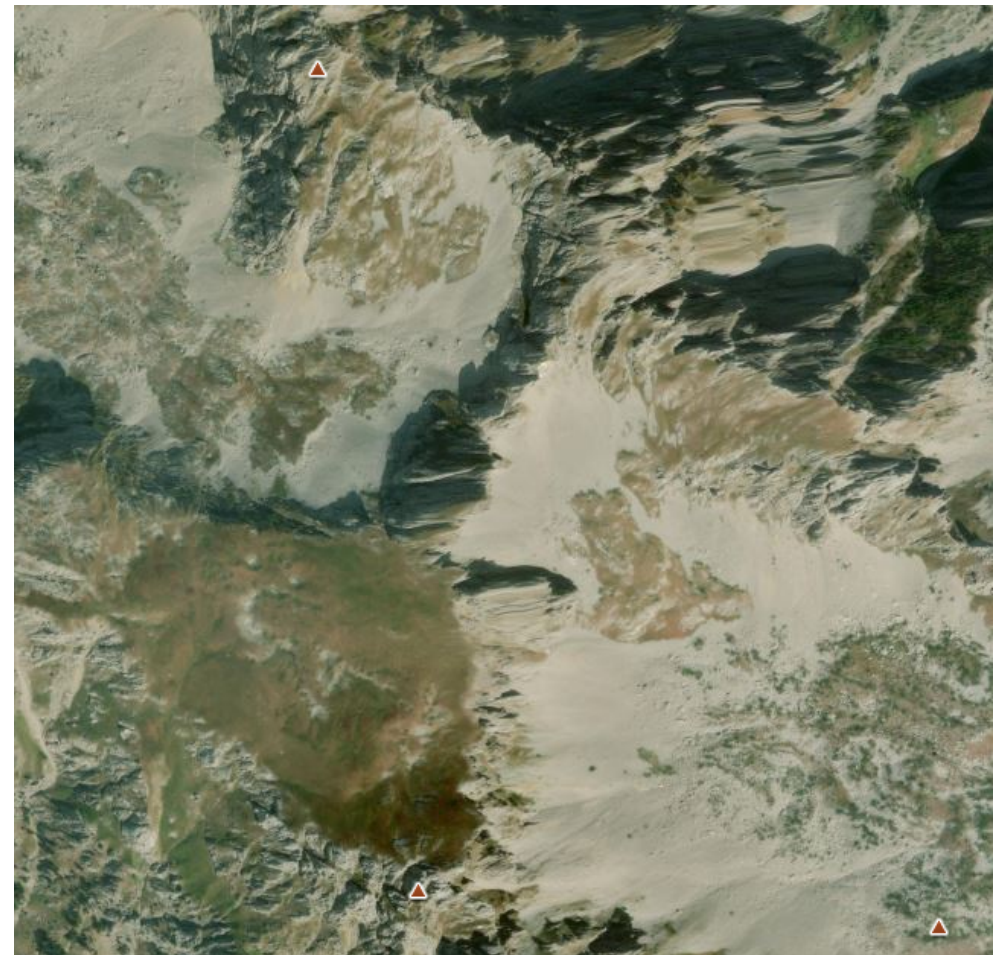
UWAGA. Dlaczego powyższe nie jest dowodem?

Bo

Bo

.....

Poprzednia mapa jest dużo bardziej czytelna od zdjęcia z góry (samolotowego):



ZADANIE 2. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = x^3 - x + xy^2$.

ROZWIĄZANIE. Funkcja f jest klasy C^2 , więc ekstrema lokalne MOŻE mieć TYLKO w punktach spełniających układ równań:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - 1 + y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \iff \left(\begin{cases} y = \pm 1 \\ x = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = 0 \end{cases} \right),$$

czyli w $p_1 = (0, 1)$, $p_2 = (0, -1)$, $p_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ lub $p_4 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$.

Obliczmy hesjan: $H = \det \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = 12x^2 - 4y^2$.

Dla $p_1 = (0, 1)$ i $p_2 = (0, -1)$ mamy $H = 12 \cdot 0 - 4 \cdot 1 < 0$, zatem f nie ma ekstremum lokalnego ani w p_1 , ani w p_2 .

Dla $p_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$: $H = \frac{12}{3} > 0$ i $f''_{xx}(p_3) = \frac{6}{\sqrt{3}} > 0$, zatem f ma minimum lokalne w p_3 .

Dla $p_4 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$: $H = \frac{12}{3} > 0$ i $f''_{xx}(p_4) = -\frac{6}{\sqrt{3}} < 0$, zatem f ma maksimum lokalne w p_4 .

ODP. f ma dwa ekstrema lokalne: minimum w $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ i maksimum w $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$.

* * *

PRZYKŁAD 3. Dla funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 14$

BEZ Tw. można pokazać, że f ma jedyne ekstremum lokalne w $(2, 3)$, bo geometria mówi, że funkcja ta mierzy kwadrat odległości punktu (x, y) od $(2, 3)$ powiększony o 1 (zbliżając/oddalając się do/od $(2, 3)$ zmniejsza/zwiększa się wartość f).

BEZ geometrii TEŻ można obejść się bez owego twierdzenia (z hesjanem).

Mianowicie zauważmy, że:

$$f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + \text{coś} \geq 0^2 + 0^2 + \text{coś} = f(2, 3) \quad (\text{gdzie coś to stała!})$$

zatem f przyjmuje wartość najmniejszą w $(2, 3)$ (czyli jest to też minimum lokalne).

Jest to jedyny punkt zerujący obie pochodne $f'_x(x, y) = 2(x - 2)$, $f'_y(x, y) = 2(y - 3)$, więc f nie ma innych ekstremów lokalnych.

* * *

PRZYKŁAD 1. (raz jeszcze) Dla funkcji $f(x, y) = x^3 - x + y^3$

BEZ rachunków można pokazać, że nie ma ekstremów lokalnych (zob. $f|_{\{x_0\} \times \mathbb{R}}$).

Podobnie dla $g(x, y) = x^5(2 + \sin y)$, $h(x, y, z) = z^3 2^{xy}$.

* * *

Gdy (niebanalny) algorytm przerobi je na zdjęcie z perspektywy, to efekt jest bardziej czytelny:



Mapa i powyższe zdjęcia pochodzą z portalu mapy.cz.