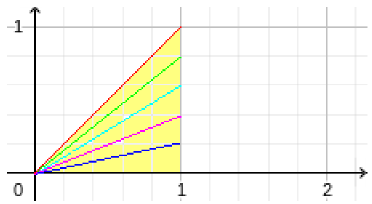
Analiza matematyczna 3, Notatki z wykładu 8b $\iint\limits_P f$

Przykład 0. Niech $f(x,y)=x^2$, $P=\{(x,y): 0\le y\le x,\ x\in[0,1]\}$ i $n\in\mathbb{N}$.

a) Linie postaci $y=\frac{k}{n}\cdot x$, $k\in\mathbb{Z}$ wyznaczają podział ω_n' zbioru P, dla którego:



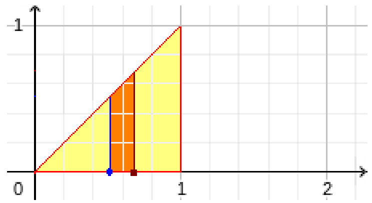
- $\sup f[P_i]=$ ...... dla każdego $P_i\in\omega_n'$
- $\inf f[P_i]=$ ...... dla każdego $P_i\in\omega_n'$

skąd

$s_{\omega_n'}=$ .... $S_{\omega_n'}=$ ....

i NIC z tego nie mamy; różnią się bardzo!

b) Linie postaci $x=\sqrt{\frac{k}{n}}$, $k\in\mathbb{Z}$ wyznaczają podział ω_n'' zbioru P, dla którego:



- pole $P_k=$ ...... dla każdego $P_k\in\omega_n''$

stąd

$s_{\omega_n''}=$ .... $S_{\omega_n''}=$ ....

skąd

$$\iint\limits_P x^2\,d\omega=\lim_{n\to\infty}S_{\omega_n''}= \text{......}$$

* * *

Twierdzenie. Jeśli $f(x,y)$ jest ciągła na zwartym P, to jest całkowalna na P, tzn. $\underline{\iint\limits_P} f=\overline{\iint\limits_P} f$, całka dolna i górna są równe.

Ponadto, jeśli ω_n jest ciągiem coraz drobniejszych podziałów P, tzn. takim, że największe średnice ich elementów są zbieżne do 0, to

$$\lim_{n\to\infty}s_{\omega_n}=\lim_{n\to\infty}\sigma_{\omega_n}=\lim_{n\to\infty}S_{\omega_n}=\iint\limits_P f\ .$$

Powyższe twierdzenie pozwala łatwo dowodzić twierdzeń takich, jak poniższe:

Tw.

a) Jeśli .... , to $\iint\limits_P f(x,y)+g(x,y)\,d\omega=$ ....

b) Jeśli .... , to $\iint\limits_P \pi\cdot f(x,y)-e\cdot g(x,y)\,d\omega=$ ....

c) Jeśli .... , to $\iint\limits_{A\cup B} f(x,y)\,d\omega=$ ....

d) Jeśli $\forall_{x,y}\ f(x,y)=-f(-x,y)$, to $\iint\limits_{[-2,2]\times[-3,3]} f(x,y)\,d\omega=$ ....

e) Jeśli .... , to ....

Definicja. Niech $f(x,y)$ będzie funkcją ograniczoną na zbiorze ograniczonym P. Dla podziału $\omega=\{P_1,\dots P_m\}$ zbioru P na zbiory o rozłącznych wnętrzach i przy wyborze z nich punktów $(x_1,y_1),\dots,(x_m,y_m)$ przyjmujemy oznaczenia:

$$\sigma_\omega=\sum_{i=1}^m f(x_i,y_i)\cdot|P_i|,\quad s_\omega=\sum_{i=1}^m \inf_{P_i} f\cdot|P_i|,\quad S_\omega=\sum_{i=1}^m \sup_{P_i} f\cdot|P_i|,$$

gdzie $|P_i|=$ pole zbioru P_i. Rozważając **wszystkie** podziały określamy:

$$\underline{\iint\limits_P} f:=\sup_\omega s_\omega \text{ – całka dolna,}\qquad \overline{\iint\limits_P} f:=\inf_\omega S_\omega \text{ – całka górna.}$$

Gdy są równe, to tę liczbę nazywamy całką f na zbiorze P i piszemy $\iint\limits_P f$.

Spostrzeżenia.

- $$S_\omega-s_\omega=\Big(\sum_i \sup_{P_i} f\cdot|P_i|\Big)-\Big(\sum_i \inf_{P_i} f\cdot|P_i|\Big)=\sum_i(\sup_{P_i} f-\inf_{P_i} f)\cdot|P_i|.$$
- Gdy wszystkie elementy podziału mają to samo pole $|P_i|=p$, to $S_\omega-s_\omega=p\cdot\sum_i(\sup_{P_i} f-\inf_{P_i} f)$.
- Gdy na wszystkich elementach podziału jednakowa jest różnica $\sup_{P_i}-\inf_{P_i}=c$, to $S_\omega-s_\omega=c\cdot\sum_i|P_i|=c\cdot|P|$.

TWIERDZENIE. (o zamianie całki podwójnej na iterowaną)
Niech $P = \{(x,y) : \varphi(x) \le y \le \psi(x),\ x \in [a,b]\}$, gdzie $\varphi(x), \psi(x)$ są f-cjami ciągłymi takimi, że $\varphi(x) \le \psi(x)$ dla $x \in [a,b]$. Wtedy dla funkcji $f(x,y)$ ciągłej na P mamy

$$\iint_P f(x,y)\, d\omega = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy \right) dx\,.$$

Powyższe twierdzenie ma też wersję dualną. Uzupełnij założenia:

TWIERDZENIE. (o zamianie całki podwójnej na iterowaną)
Niech $Q = \{$ ....
....

$$\iint_Q f(x,y)\, d\omega = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y) dx \right) dy\,.$$

Teraz już można stosować rachunek całkowy:

PRZYKŁADY.

a) Niech P oznacza obszar ograniczony liniami: $y = x^2 - x$, $y = 0$. Wtedy

$$\iint_P x^2 y\, d\omega = \int_0^{\dots} \left(\int_{x^2-x}^{0} x^2 y\, dy \right) dx = \int_0^{\dots} \left(\tfrac{1}{2} x^2 y^2\, dy\right)_{x^2-x}^{0} dx =$$

$$= \int_0^{\dots} \tfrac{1}{2} x^2 \cdot 0^2 - \tfrac{1}{2} x^2 (x^2 - x)^2\, dx = \dots$$

b) Dla trójkąta P o wierzchołkach $(1,2)$, $(0,0)$, $(0,2)$ mamy:

$$\iint_P x + y^2\, d\omega = \int_{\dots}^{1} \left(\int_{\dots}^{2} x + y^2\, dy \right) dx = \ \dots\dots\dots\dots$$

Ta sama całka podwójna może być inaczej przedstawiona jako całka iterowana:

$$\iint_P x + y^2\, d\omega = \int_0^{2} \left(\int_{\dots}^{y/2} x + y^2\, dx \right) dy = \ \dots\dots\dots\dots \qquad \dots = \tfrac{7}{3}.$$

c) Dla koła K o środku w $(3,4)$ i promieniu 2 mamy:

$$\iint_K xy\, d\omega = \int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots\dots}^{\dots\dots} xy\, dy \right) dx = \ \dots\dots\dots\dots$$

d) Gdy B jest obszarem wyznaczonym przez krzywe $x+1=y^2$, $2x+y^2=10$, to

$\iint\limits_B x\,d\omega =$ (wygodniej wyznaczać $x=x(y)$ i punkty przecięcia (zrób rys.)

$$= \int\limits_{-2}^{\dots\dots} \left(\int\limits_{\dots\dots}^{\dots\dots} x\,dx \right) dy = \dots\dots\dots\dots$$

e) Dla czworościanu C o wierzchołkach $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,6)$ mamy:

$$\iiint\limits_C x^2\,d\omega = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{3-3x} \left(\int\limits_0^{6-6x-2y} x^2\,dz \right) dy \right) dx = \qquad \left(\left(\begin{matrix}\text{w wewnętrznym nawiasie}\\ x^2 \text{ jest jak stała}\end{matrix}\right)\right)$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{3-3x} \left(x^2\cdot(6-6x-2y)\right) dy \right) dx = \qquad \left(\left(\begin{matrix}\text{zatem mnożymy } x^2\\ \text{przez długość przedziału}\end{matrix}\right)\right)$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{3-3x} 6x^2-6x^3-2x^2y\,dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(6x^2(3-3x)-6x^3(3-3x)-x^2((3-3x)^2-0^2)\right) dx = \qquad \begin{matrix}\text{żmudnie!}\\ \text{ale łatwo!}\end{matrix}$$

$$= 9\int\limits_0^1 x^4-2x^3+x^2\,dx =$$

$$= 9\cdot\left(\tfrac{1}{5}\cdot 1^5 - 2\tfrac{1}{4}\cdot 1^4 + \tfrac{1}{3}\cdot 1^3\right) = \tfrac{3}{10} \qquad \text{(ufff!)}$$

Tą samą całkę potrójną można inaczej zamienić na całkę iterowaną, np.:

$$\iiint\limits_C x^2\,d\omega = \int\limits_0^6 \left(\int\limits_0^{1-z/6} \left(\int\limits_0^{3-3x-z/2} x^2\,dy \right) dx \right) dz = \dots\dots\dots\dots \qquad \begin{matrix}\text{nie ma co liczyć}\\ \text{wyjdzie tyle samo}\end{matrix}$$

Można jeszcze inaczej:

$$\iiint\limits_C x^2\,d\omega = \int\limits_{\dots}^{3} \left(\int\limits_{\dots}^{\dots\dots} \left(\int\limits_{\dots}^{\dots\dots} x^2\,dz \right) dx \right) dy = \dots\dots\dots\dots$$

f) Poniższa całka iterowana

$$\int\limits_1^2 \left(\int\limits_x^{2x} \left(\int\limits_0^{x^2+y^2} x^2\,dz \right) dy \right) dx \quad \text{jest równa całce potrójnej} \quad \iiint\limits_V x^2\,d\omega,$$

gdzie $V=\{(x,y,z) : x\in[1,2] \ \wedge\ x\le y\le\ \dots \ \wedge\ 0\le z\le\ \dots\dots\ \}$;

mówiąc 'prozą': V jest bryłą pod paraboloidą $z=x^2+$ ...... leżącą nad trapezem o wierzchołkach $(1,1,0)$, $(2,2,0)$, $(2,...,0)$, $(1,...,...)$.