Analiza matematyczna 3, Lista 1.

1. Jaki odcinek jest opisany poniższą parametryzacją? Jaką ma długość?

a) $G(t) = (|t|+1, 3|t|+4),\ |t| \le 4$ **b)** $H(s) = (|s|, 3|s|+1),\ s \in [1,5]$

c) $x = \sin t + 1, y = 2\sin t + 3,\ \pi \le t \le 4\pi$ **d)** $x = |t|, y = 2|t|, z = 3|t|,\ t^2 \le 1$

e) $x = 2-3t,\ y = -4t,\ 0 \le t \le 12$ **f)** $x = e^t,\ y = e^{4+t}+3,\ 0 \le t \le \log 5$

2. Zaznacz linie opisane parametrycznie (wyznacz zbiory wartości funkcji):
a) $x = \cos(2\pi t)+1,\ y = \cos(2\pi t)+3,\ t \in [-2,1]$.
b) $x = 3\cos(2\pi t)+1,\ y = 3\cos(2\pi t)+3,\ t \in [-2,1]$.
c) $x = 3\cos(2\pi t)+1,\ y = 3\sin(2\pi t)+3,\ t \in [-2,1]$.
d) $x = 2\cos(2\pi t)+1,\ y = 3\sin(2\pi t)+3,\ t \in [-2,1]$.
e) $x = 2\cos(2\pi t)+1,\ y = 3\cos^2(2\pi t)+3,\ t \in [-2,1]$.
f) $x = 2\cos(2\pi t)+1,\ y = 3\sin^2(2\pi t)+3,\ t \in [-2,1]$.
g*) $x = \cos(2\pi t),\ y = \sin(2\pi t)+2[t+2],\ t \in [-2,1]$.
h) $x = t,\ y = -\sqrt{4-t^2},\ t \in [-2,2]$.
i) $x = -\sqrt{4-t^2},\ y = 4-t^2,\ t \in [-2,2]$.
j) $x = 2t,\quad y = 3t,\quad z = 4t,\quad t \in [1,2]$.
k) $x = 2t+3,\quad y = 3t+4,\quad z = 4t+5,\quad t \in [-1,3]$.
ℓ) $x = 2t^2+3,\quad y = 3t^2+4,\quad z = 4t^2+5,\quad t \in [0,2]$.
m) $x = 2t^2+3,\quad y = 3t^2+4,\quad z = 4t^2+5,\quad t \in [-1,2]$.

3. Podaj opis jakiejś wędrówki:
a) po linii $L = \{(x,|x|) : x \in [-1,2]\}$ **a')** $L' = \{(x,y) : y = ||x-1|-2|,\ |x| \le 5\}$
b) po brzegu jakiegoś: kwadratu, **b')** trójkąta **c)** po (jakiejś) ósemce

4. Zbiór wartości funkcji $F : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $F(t) = (\cos t, \sin t, t)$ nazywany jest *linią śrubową*. Opisz gwint śruby o średnicy 12mm i skoku 2mm.

5. Wzór $M(t) = (5\cos(\pi/2 - 2\pi t),\ 5\sin(\pi/2 - 2\pi t))$, $t \in [0,24]$ opisuje położenie końca minutowej wskazówki (o długości ...) zegarka jako funkcję czasu.
a) Opisz ruch końca małej wskazówki o długości 3
b) Opisz długość odcinka łączącego końce wskazówek (jako funkcję czasu).
c*) Jak zmienić powyższe, gdy zegar późni się (jednostajnie) 5 minut na dobę?

6*. Dla parametru $n \in \mathbb{N}$ linia K_n jest opisana parametrycznie:

$$x_t = (1-\frac{1}{n})\cos(t) + \frac{1}{n}\cos(t - n\cdot t),\ y_t = (1-\frac{1}{n})\sin(t) + \frac{1}{n}\sin(t - n\cdot t),\quad t \in [0,2\pi].$$

Gdy po okręgu $x^2+y^2=1$ toczy się bez poślizgu okrąg $(x-(1-\frac{1}{n}))^2+y^2=\frac{1}{n^2}$, to punkt $A_t = (x_t, y_t)$ leży nieruchomo na toczącym się okręgu i 'rysuje' linię K_n.
a) Udowodnij tw. Kopernika: K_2 jest odcinkiem. **b)** Czy K_3 jest odcinkiem?

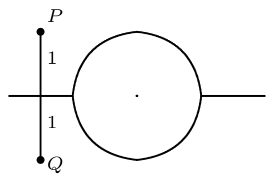
Zadania dodatkowe

7. Do zegarka z zadania 5. dodaj: **d)** Opisz ruch końca sekundnika o długości 6
e*) Jak zmienić powyższe, gdy zegar śpieszy się (jednostajnie) 5 sekund na dobę?

8*. Opisz ruch po okręgu, w którym największa szybkość osiągana jest 'na dole'. Dla utrudnienia: niech to będzie ruch okresowy.

Na rysunku obok widać... pana Jo (w kapeluszu), który jedzie na rowerze i na bagażniku wiezie drąg PQ długości $2d = 2$.

9*. Zakładamy, że Jo jedzie po wykresie f-cji $f(x) = e^x$, ściśle mówiąc: środek bagażnika przesuwa się idealnie nad wykresem.
a) Wyznacz równania linii, które wykreślają końce drąga.
b) Powtórz a), gdy $d = 2$ oraz gdy $d = 0{,}3$.
c) Czy te linie są wykresami funkcji (z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$) ?



Jo

9.** Zadanie 9* nie jest sformułowane precyzyjnie, (nie jest jednoznaczne). Doprecyzuj je.

10*. Powtórz zad. 9. dla $f(x) = x^2$ oraz dla $f(x) = \sin x$.