

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. LISTA 4.

1. Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu; wskaż ich dziedziny.

a) $f(x, y) = x^7 y^9 + x e^{xy}$ b) $f(x, y, z) = \arctan(x^2 y^3 z^4)$ c) $z = |x| + |y|$

d) $z = \frac{x^2 y^2}{1+y^2}$ e) $f(x, y) = \frac{e^{xy}-1}{x}$, $f(0, y) = |y|$ f) $f(x, y) = \begin{cases} 3x & \text{dla } x^2 \leq y \\ y & \text{dla } x^2 > y \end{cases}$

2. Zbadaj w punkcie $(0, 0)$: istnienie pochodnych cząstkowych, ich ciągłość, istnienie pochodnych kierunkowych funkcji, określonej wzorem: $f(0, 0) = 0$ i dla $(x, y) \neq (0, 0)$

a) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ b) $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ c) $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$

3. Podaj zbiór tych wszystkich punktów dziedziny funkcji f , w których:

a) nie istnieje f'_x b) nie istnieje f'_y c) f nie jest ciągła,

gdzie A) $f(x, y) = \begin{cases} x+y & \text{dla } xy \geq 0 \\ x+y^2 & \text{dla } xy < 0 \end{cases}$ B) $f(x, y) = \begin{cases} x & \text{dla } (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ y & \text{dla } (x, y) \notin [0, 1] \times [0, 1] \end{cases}$

4. Niech $f(x, y) = \frac{\sin x}{x} + 3x + y^3$, $f(0, y) = p^2$. Dla jakich wartości parametru p

a) f ma pochodną cząstkową f'_x w punkcie $(0, 2)$ b) istnieje $f'_y(0, 2)$

c) istnieje $f'_x(2, 0)$ d) istnieje $f'_y(2, 0)$ e) f jest ciągła w $(0, 0)$

* * *

5. W podanym punkcie znajdź równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni

a) $z = (2 + x - y)^2$, $(3, -1, 36)$ b) $z = 4x^2 + y^2$, $(2, 1, 17)$

c) $zy + z = x + 2$, $(2, 3, 1)$ d) $xyz = 1$, $(\frac{1}{2}, -2, -1)$

e) $\sin(xy) = 2 - z^2$, $(\pi, \frac{1}{2}, -1)$ f*) $(x + y - 1)(x + y + 1) = 2xy$, $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 2)$

6. Udowodnij, że płaszczyzny styczne do powierzchni $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ i $z^2 = x^2 + y^2$ w punkcie $(2, 2, 2\sqrt{2})$ są prostopadłe.

7. Znajdź długość odcinka prostej $x = 2, y = 3$ zawartego między powierzchnią $z = x^2 + y^2$ i płaszczyzną styczną do niej w punkcie $(1, 1, 2)$.

* * *

8. Oblicz gradient funkcji a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4}$ z) $f(x, y, z) = (x^2 + y^4)z$

9. Oblicz pochodną kierunkową funkcji. (Doprecyzuj (jakoś) zadania.)

a) $f(x, y) = x^8 y^4 + e^{x^2 y}$ w punkcie $(0, 5)$ wzdłuż wektora $[-1, 2]$

b) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ w punkcie $(1, 1)$ w kierunku wektora $[5, 12]$

c) $f(x, y) = 2xy + x^2 y^2$, $[1, -1]$ d) $f(x, y) = x(x + y)^{20}$, $[5, 12]$

e) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ w punkcie $(1, 2)$ w kierunku prostej $4x + 3y = 12$