ANALIZA MATEMATYCZNA 3. LISTA 7.

1. Wyznacz wartość najmniejszą i największą funkcji przy podanych warunkach. Tam, gdzie można zastosuj metodę czynników nieoznaczonych Lagrange'a.

a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2y - 3$ **a')** gdy $x^2 + y^2 = 4$ **a")** gdy $x^2 + y^2 \leq 4$

b) $f(x,y) = x^3+x^2+y^2/3$ gdy $x^2+y^2 \leq 36$ **c)** $f(x,y) = xy$ gdy $2x^2+y^2 \leq 4$

d) $f(x,y) = 16-x^2-4y^2$ gdy $x^4+2y^4 \leq 1$ **e)** $f(x,y) = xy$ gdy $x^2+y^2 = 32$

f) $f(x,y) = 4x^2 + y^3 + 3y + 7$ gdy $2x^2 + \frac{3}{2}y^2 = \frac{3}{2}$

1'. Jak w 1.

a) $f(x,y,z) = 3z - x - 2y$ gdy $x^2 + 4y^2 - z = 0$
a') $f(x,y,z) = 3z - x - 2y$ gdy $x^2 + 4y^2 - z = 0$ i $x - y = 0$

b) $f(x,y,z) = y^3 + xz^2$ gdy $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
b') $f(x,y,z) = y^3 + xz^2$ gdy $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i $x - y = 0$

c) $f(x,y,z) = xyz$ gdy $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0$

d*) $f(x,y,z) = xyz$ gdy $x + y + z = 5,\ xy + xz + yz = 8$

* * *

2. Czy podane równanie określa jednoznacznie funkcję uwikłaną $y = y(x)$ w pewnym otoczeniu podanego punktu? Jeśli tak, to znajdź równanie stycznej w tym punkcie.

a) $x^4y + xy^3 = 10,\ A=(1,2)$ **b)** $x^y = y^x,\ A=(2,4);\ B=(3,3);\ C=(2,5)$

c) $x^2+y^2 = 2xy,\ A=(1,1);\ B=(0,0)$ **d)** $x^4+y^4 = 2x^2y^2,\ A=(1,1);\ B=(0,0)$

e) $x^2+y^2= 2x,\ A=(1,1);\ B=(0,0)$ **f)** $x^2+y^2-x = 2xy,\ A=(1,0);\ B=(0,0)$

g) $x^3 - y^3 + x - y = 0,\ A=(p,p)$ **h)** $x^4 + y^4 = 2xy,\ A=(1,1);\ B^*=(0,0)$

Wsk. (do h) B^*) Rozważ punkty $p_t = \left(\sqrt{\frac{2t}{1+t^4}}, t \cdot \sqrt{\frac{2t}{1+t^4}}\right)$, dla $t>0$.

3. Wyznacz równania płaszczyzn stycznych do powierzchni w podanych punktach.

a) $x^2z + yz^2 - 2 = 0,\ A=(\sqrt{2},0,1)$ **b)** $e^{xz} = yz,\ A=(0,1,1);\ B=(1,e,1)$

c) $x^2+ y^3+ z^4 = x+z,\ A=(0,0,0);\ B=(1,0,0);\ C=(1,0,1)$

4. Oblicz pochodną dy/dx i drugą pochodną d^2y/dx^2 funkcji uwikłanej $y = y(x)$

a) $xe^y - y + 1 = 0$ **b)** $x^2 + y^2 = 3xy$ **c)** $x - y + e^x - e^y = 0$

5. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $y = y(x)$ zadanej równaniem:

a) $x^2 + y^2 + 4y = xy + 2x$ **b)** $x^3 + y^3 = 12xy$ **c*)** $\ln\sqrt{x^2+ y^2} = \arctan\frac{y}{x}$

6. Wiedząc, że linia $B = \{(x,y) : x^4 + y^4 = 9xy\}$ wygląda jak przekręcona nieco ósemka, znajdź najmniejsze takie a, że $B \subset [-a,a]^2$.