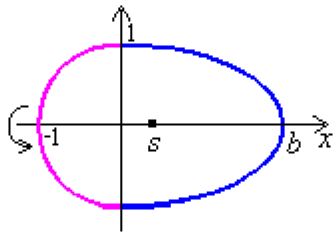
Jak leży jajko?

Kolumb "brutalnie" rozwiązał problem postawienia jajka tak, by jego oś była prostopadła do stołu. Tutaj zbadamy jak jajko leży sobie spokojnie na stole. Pod jakim kątem nachylona jest jego oś?

Co to jest jajko?

Załóżmy, że jajko jest jednolite w środku (ma stałą gęstość) i jest ograniczone powierzchnią jaką zataczają: ćwiartka okręgu i elipsy (względem osi OX) o równaniach:

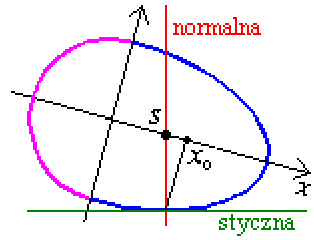
$$\sqrt{1-x^2},\ -1 \le x \le 0,$$
$$\sqrt{1-\left(\frac{x}{b}\right)^2},\ 0 \le x \le b,$$



gdzie $b > 1$ jest parametrem odpowiedzialnym za wydłużenie jajka.

Takie jajko leży na stole tak, że normalna (prostopadła do stycznej) przechodzi przez środek ciężkości s.

Wyznaczymy równanie stycznej; najpierw policzmy pochodną w punkcie x_0:



$$y' = \left(-\sqrt{1-\left(\frac{x}{b}\right)^2}\right)' = \frac{x_0}{b^2\sqrt{1-\left(\frac{x_0}{b}\right)^2}}.$$

Równanie stycznej to

$$y = \frac{x_0}{b^2\sqrt{1-\left(\frac{x_0}{b}\right)^2}}(x-x_0) - \sqrt{1-\left(\frac{x_0}{b}\right)^2}$$

a równanie normalnej to

$$y = \frac{-b^2\sqrt{1-\left(\frac{x_0}{b}\right)^2}}{x_0}(x-x_0) - \sqrt{1-\left(\frac{x_0}{b}\right)^2}$$

Stąd łatwo wyznaczamy x_n - miejsce zerowe normalnej:

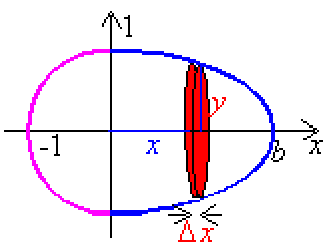
$$x_n = x_0\,(b^2 - 1)\,/\,b^2.$$

Z tego wzoru widać, że jeśli znajdziemy takie x_0, że normalna przejdzie przez środek ciężkości, to będzie to punkt równowagi trwałej (dlaczego?).

Pozostaje nam teraz wyznaczyć środek ciężkości, a właściwie tylko jego x-ową współrzędną s (pozostałe są oczywiście równe 0). Współrzędna ta jest zdefiniowana wzorem

$$s = \frac{\sum x_i \cdot m_i}{\sum m_i},$$

gdzie m_i oznacza podział całej masy na "malutkie kawałeczki", dla których x_i to x-owe współrzędne. W naszym przypadku dzielimy jajko na "malutkie" plasterki, dla których x-owa współrzędna jest jednakowa (patrz rysunek).



Sumowanie zamieniamy na całkowanie (ponieważ gęstość jest stała masę zastępujemy objętością):

$$\frac{\int_{-1}^{0} x\cdot\pi\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx+\int_{0}^{b} x\cdot\pi\left(\sqrt{1-\left(\frac{x}{b}\right)^2}\right)^2 dx}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 1^2\cdot b}$$

Wbrew pozorom rachunki nie są trudne - otrzymujemy:

$$s = {}^3/_8 \cdot (b-1)\,.$$

Warunek "normalna przechodzi przez środek ciężkości" zapisujemy teraz jako

$$x_n = s\,,$$

czyli

$$x_o\,(b^2-1)\,/\,b^2 = {}^3/_8\cdot(b-1)\,,$$

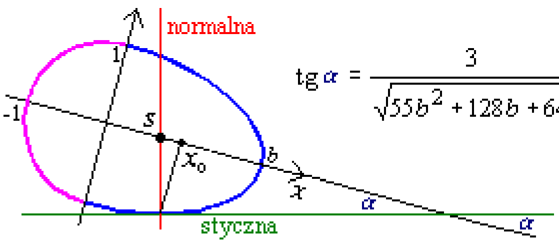
skąd

$$x_o = \frac{3}{8}\cdot\frac{b^2}{b+1}.$$

Na koniec obliczmy współczynnik kierunkowy stycznej (poprowadzonej w punkcie równowagi x_o). Określa on zarazem tangens kąta nachylenia osi jajka do płaszczyzny podstawy (stołu).

$$\frac{x_o}{b^2\sqrt{1-\left(\frac{x_o}{b}\right)^2}}=\frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{b^2}{b+1}}{b^2\sqrt{1-\left(\frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{b^2}{b+1}}{b}\right)^2}}=\dots=\frac{3}{\sqrt{55b^2+128b+64}}.$$

Zatem gdy jajko "leży sobie spokojnie" na stole to tangens kąta nachylenia jego osi wyraża się wzorem:



$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{\sqrt{55b^2+128b+64}}$$

Przeanalizujemy ten wzór. Przypomnijmy, że b to parametr odpowiedzialny za wydłużenie jajka; przyjmuje wartości z przedziału $(1, +\infty)$. Pod pierwiastkiem mamy funkcję rosnącą na tym przedziale - zatem cała funkcja - tangens kąta nachylenia - jest malejąca. Co więcej, jej granica w nieskończoności jest równa zero. Oznacza to, że oś jajek bardzo wydłużonych jest prawie pozioma.

To, co jest o wiele bardziej zaskakujące to fakt, że

$$\textit{jeśli}\quad b\to 1^+\quad \textit{to}\quad \operatorname{tg}\alpha\to\frac{3}{\sqrt{247}}=\operatorname{tg}\alpha_o\approx\operatorname{tg}11^\circ$$

co oznacza, że dla jajek, które są niemal w kształcie kuli ich oś jest nachylona pod kątem prawie 11^o - i ten kąt jest większy niż dla jajek bardziej wydłużonych.

Jeśli te wnioski nie są potwierdzane przez obserwacje, to oznacza to, że któreś z założeń nie jest zgodne z rzeczywistością - cóż tak bywa przy próbach modelowania rzeczywistości.

DODATEK

Można też spróbować inaczej modelować; niech teraz jajko będzie opisane przez dwie ćwiartki elips o równaniach:

$$\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2},\ -a \le x \le 0,$$
$$\sqrt{1-\left(\frac{x}{b}\right)^2},\ 0 \le x \le b,$$

gdzie $b > a > 1$ to parametry odpowiedzialne za wydłużenie jajka.

Rachunki dotyczące stycznej, normalnej, miejsca zerowego normalnej pozostają niezmienione. Nieznacznie należy zmodyfikować obliczenia środka ciężkości s:

$$\frac{\int_{-a}^{0} x\cdot\pi\left(\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)^2 dx + \int_{0}^{b} x\cdot\pi\left(\sqrt{1-\left(\frac{x}{b}\right)^2}\right)^2 dx}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 1^2\cdot a + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 1^2\cdot b}$$

Otrzymujemy teraz:

$$s = {}^3/_8 \cdot (b - a)\,.$$

Skąd, wstawiając do równania $x_n = s$, obliczymy łatwo x_o:

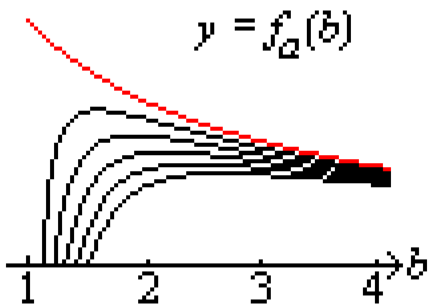
$$x_o = \frac{3}{8}\cdot\frac{b^2(b-a)}{b^2-1}$$

Współczynnik kierunkowy stycznej (poprowadzonej w punkcie równowagi x_o) jest teraz określony wzorem, który nie jest już tak prosty jak poprzednio:

$$\frac{x_o}{b^2\sqrt{1-\left(\frac{x_o}{b}\right)^2}} = \ldots = \frac{3\cdot(b-a)}{\sqrt{64(b^2-1)^2 - 9\cdot b^2(b-a)^2}} = f_a(b)$$

Przy ustalonym $a > 1$ potraktujmy ten wzór jako funkcję zmiennej b (o dziedzinie $(a,+\infty)$). Jest to tangens kąta nachylenia osi jajka (w położeniu równowagi). Obok przedstawiamy wykresy tych funkcji dla: a=1,1; a=1,2; a=1,3; a=1,4; a=1,5 oraz wykres dla a=1. Widać, że **dla *a* > 1** nie ma już poprzedniej osobliwości, mamy bowiem

$$\text{jeśli } b \to a^+ \text{ to } f_a(b) \to 0\,.$$



UWAGA. Warto przeanalizować również przypadek $a < 1$.

Na zakończenie

ZADANIE (dla wytrwałych). Zbadać jak leżą wydmuszki.