Analiza matematyczna A3. Wypełniańka do listy 6.

Zadanie 1. Niech $D = \{(x,y) : \ 0 \le x \le 4 \ \wedge \ 0 \le y \le 4\}$ i niech funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem $f(x,y) = x^2 + 2|y-x| + y^2 - 8y + 25$. Znajdź wartość najmniejszą i największą tej funkcji i podaj wszystkie argumenty, w których te wartości są przyjmowane.

Rozwiązanie, wesja A
D jest ...... , czyli zbiorem ograniczonym i domkniętym, f jest ...... , więc z tw.Weierstrassa wynika, że w. największa i w. najmniejsza są przyjmowane w D.

Funkcja f jest $\mathcal{C}^1$ w zbiorze W = wnętrze D bez odcinka o końcach ....

$\diamondsuit_a$ Punkty krytyczne w $W \cap \{(x,y) : x > y\}$:

$$\begin{cases} f'_x = \dots \\ f'_y = \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \text{............} = \dots \\ \text{............} = \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \text{......} = \dots \\ \text{......} = \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \text{......} = \dots \\ \text{......} = \dots \end{cases}$$

W tym obszarze p. krytycznymi są: ....

$\diamondsuit_b$ Punkty krytyczne w $W \cap \{(x,y) : x < y\}$:

$$\begin{cases} f'_x = \dots \\ f'_y = \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \text{............} = \dots \\ \text{............} = \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \text{......} = \dots \\ \text{......} = \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \text{......} = \dots \\ \text{......} = \dots \end{cases}$$

W tym obszarze p. krytycznymi są: ....

$\heartsuit_{y=0}$ Punkty krytyczne w $D \cap \{(x,y) : y = 0\}$:
Niech $g : [0,4] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x,0) = x^2 + 2|0-x| + 0^2 - 8\cdot 0 + 25 = (x + \ \dots\ )^2 + \dots$
g jest f. kwadr. rosnącą na ...... (tu mini rysunek), więc p. krytycznymi są: ......

$\heartsuit_{y=4}$ Punkty krytyczne w $D \cap \{(x,y) : y = 4\}$:
Niech $g : [0,4] \to \mathbb{R}$ i $g(x) = f(x, \dots) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = (x - \ \dots\ )^2 + \dots$
g jest f. kwadratową (p. rys.), więc p. krytycznymi są: $(0,4)$, (... , ...), (4, ...).

$\heartsuit_{y=x}$ Punkty krytyczne w $D \cap \{(x,y) : y = x\}$:
Niech $g : [0,4] \to \mathbb{R}$ i $g(x) = f(x,x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots =$ ....
g jest f. kwadratową (p. rys.), więc p. krytycznymi są: $(0,0)$, $(\dots,\dots)$, $(4,\dots)$.

$\heartsuit_{x=0}$ Punkty krytyczne w $D \cap \{0\} \times \mathbb{R}$:
Niech $g : [0,4] \to \mathbb{R}$ i $g(y) = f(0,y) = 0^2 + 2|y-0| + y^2 - 8y + 25 = (y-3)^2 + \dots$.
g jest f. kwadratową (p. rys.), więc p. krytycznymi są: ....

$\heartsuit_{x=4}$ Punkty krytyczne w $D \cap \{4\} \times \mathbb{R}$:
Niech $g : [0,4] \to \mathbb{R}$ i $g(y) = f(4,y) = 4^2 + 2|y-4| + y^2 - 8y + 25 = (y-5)^2 + \dots$.
g jest f. malejącą (p. rys.), więc p. kryt. to końce: $p_3 = (4,0)$, $p_6 = (4, \dots)$.

Podsumowanie: $\diamondsuit_a \cup \diamondsuit_b \cup \heartsuit$
W zbiorze wszystkich p. krytycznych szukamy w. największą i najmniejszą:
$f(0,0) = \dots$, $f(4,0) = \dots$, $f(0,4) = \dots$, $f(4,4) = \dots$, ...

Odpowiedź: $\sup_D f = \ \dots\ = f(\dots,\dots)$ oraz $\inf_D f = \ \dots\ = f(\dots,\dots)$.

Rozwiązanie, wesja B
D jest ...... , czyli zbiorem ograniczonym i domkniętym, f jest ...... , więc z tw.Weierstrassa wynika, że w. największa i w. najmniejsza są przyjmowane w D.

Funkcja f jest $\mathcal{C}^1$ w zbiorze W = wnętrze D bez odcinka o końcach ....

$\diamondsuit_a$ Punkty krytyczne w $W \cap \{(x,y) : x > y\}$:

$$\begin{cases} f'_x = \dots \\ f'_y = \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \text{............} = \dots \\ \text{............} = \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \text{......} = \dots \\ \text{......} = \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \text{......} = \dots \\ \text{......} = \dots \end{cases}$$

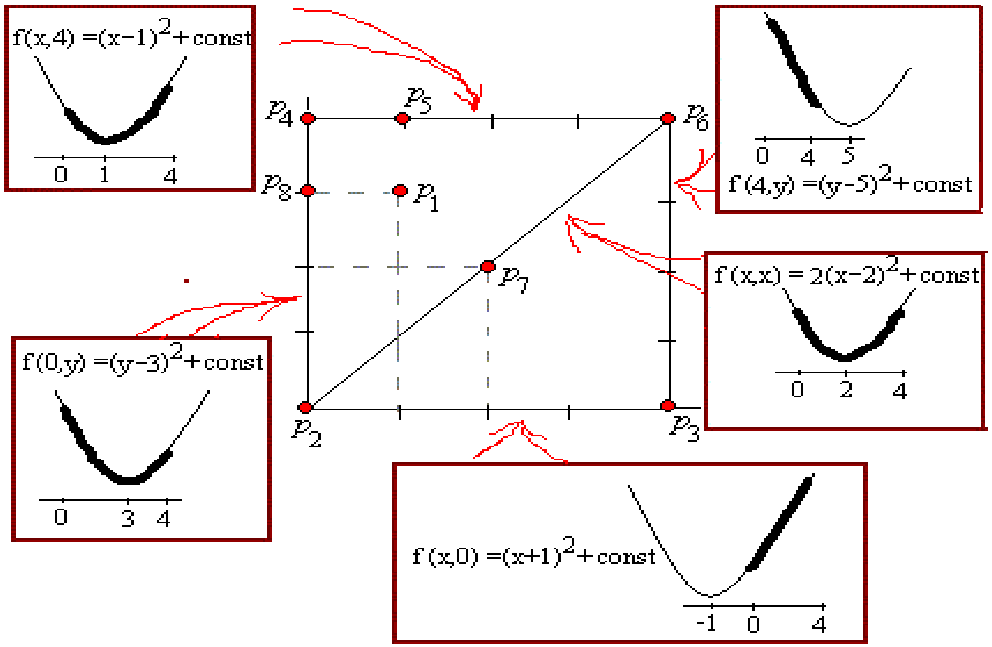
W tym obszarze p. krytycznymi są: ....

$\diamondsuit_b$ Punkty krytyczne w $W \cap \{(x,y) : x < y\}$:

$$\begin{cases} f'_x = \dots \\ f'_y = \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \text{............} = \dots \\ \text{............} = \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \text{......} = \dots \\ \text{......} = \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \text{......} = \dots \\ \text{......} = \dots \end{cases}$$

W tym obszarze p. krytycznymi są: ....

$\heartsuit$ Punktami krytycznymi w $D \setminus W$ są: p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8 odszukane tak, jak pokazuje poniższy rysunek:



Podsumowanie: $\diamondsuit_a \cup \diamondsuit_b \cup \heartsuit$
W zbiorze wszystkich p. krytycznych szukamy w. największą i najmniejszą:
$f(0,0) = \dots$, $f(4,0) = \dots$, $f(0,4) = \dots$, $f(4,4) = \dots$, ...

Odpowiedź: $\sup_D f = \ \dots\ = f(\dots,\dots)$ oraz $\inf_D f = \ \dots\ = f(\dots,\dots)$.