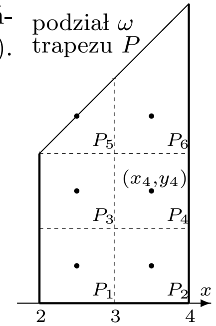
Analiza matematyczna A3, Notatki: $\iint\limits_P f$

Przykład. $\iint\limits_P f$ gdzie $f(x,y) = [x-y]$ i P – trapez $(2,0),(4,0),(4,4),(2,2)$.

Zbiór $P = [2,4]\times[0,4]\cap\{(x,y): y\le x\}$ można podzielić na skończenie wiele zbiorów o rozłącznych wnętrzach (na wiele sposobów). Rozważmy podział $\omega = \{P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6\}$ gdzie

$P_1 = [2,3]\times[0,1]$, $P_2 = [...,4]\times[...,...]$,
$P_3 = [2,3]\times[...,...]$, $P_4 = [...,...]\times[1,2]$,
$P_5 = [2,3]\times[2,3]\cap P$, $P_6 = [3,4]\times[2,4]\cap P$.



Pola tych zbiorów są równe: $\Delta p_1 = \Delta p_2 = \Delta p_3 = \Delta p_4 = 1$, $\Delta p_5 = 0.5, \Delta p_6 = ...$ Oczywiście pole $P = \sum_i \Delta p_i$.
W każdym zbiorze P_i wybierzmy po (jednym) punkcie (x_i,y_i); np. $(\frac52,\frac12)$, $(\frac72,\frac12)$, $(\frac52,\frac32)$, $(\frac72,\frac32)$, $(\frac52,\frac52)$, $(\frac72,\frac52)$.

Dla funkcji $f(x,y) = [x-y]$, podziału ω z wybranymi punktami (x_i,y_i), obliczamy:

$$\sigma_\omega := \sum_{i=1}^{6} f(x_i,y_i)\cdot\Delta p_i = $$
$$= [\tfrac52-\tfrac12]\cdot1 + [\tfrac72-\tfrac12]\cdot1 + [\tfrac52-\tfrac32]\cdot1 + [\tfrac72-\tfrac32]\cdot1 + [\tfrac52-\tfrac52]\cdot\tfrac12 + [\tfrac72-\tfrac52]\cdot\tfrac32 = 9\tfrac12.$$

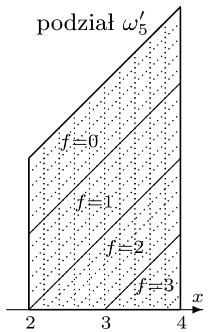
Przy innym wyborze punktów (np. zmieniając tylko $(x_2,y_2) = (4,0)$) możemy dostać inną liczbę (w tym przypadku $10\frac12$) ale zawsze między liczbami s_ω i S_ω gdzie:

$$s_\omega := \sum_{i=1}^{...}\big(\inf_{(x,y)\in P_i} f(x,y)\ \cdot\Delta p_i\big) = 1\cdot1 + 2\cdot1 + 0\cdot1 + 1\cdot1 + 0\cdot\tfrac12 + 0\cdot\tfrac32 = \ ... \ ,$$

$$S_\omega := \sum_{i=1}^{6}\big(\sup_{(x,y)\in P_i} f(x,y)\ \cdot\Delta p_i\big) = 3\cdot1 + 4\cdot1 + 2\cdot1 + 3\cdot1 + 1\cdot\tfrac12 + 2\cdot\tfrac32 = 15\tfrac12\ .$$

Dla tej funkcji i zbioru P można rozważać 'wygodniejsze' podziały: mianowicie dla **ustalonej** liczby naturalnej n proste o równaniach postaci $y = x + \frac kn$, $x = \frac kn$, $k\in\mathbb{Z}$, dzielą P na równoległoboki i trójkąty (na rys. $n = 5$) wyznaczając podział ω_n'. Gdy wszystkie punkty (x_i,y_i) są wybrane z **wnętrz** P_i, to łatwo zliczamy (wskazówka: zsumuj pola takich P_i, że $f(x_i,y_i) = 2$):

$$\sigma_{\omega_n'} = \sum_i f(x_i,y_i)\cdot\Delta p_i = 3\cdot\tfrac12 + 2\cdot\tfrac32 + 1\cdot2 + 0\cdot2 = 6\tfrac12$$



Podobnie $\quad s_{\omega_n'} = \sum_i \inf_{(x,y)\in P_i} f(x,y)\cdot\Delta p_i = 6\frac12$.

Zaznacz te P_i, na których f nie jest stała. Widać wtedy, że

$$S_{\omega_n'} = \sum_i \sup_{(x,y)\in P_i} f(x,y)\cdot\Delta p_i =$$
$$= 6\tfrac12 + 1\cdot\tfrac2n + 1\cdot\tfrac2n + 1\cdot(\tfrac1n + \tfrac1{2n^2}) + 1\cdot\tfrac1{2n^2} = 6\tfrac12 + \tfrac5n + \tfrac1{n^2}.$$

Zatem dla 'dużych' n wielkości $\sigma_{\omega_n'}, s_{\omega_n'}, S_{\omega_n'}$ są niemal $6\frac12 = \iint\limits_P f$.

Przykład. Dla $f(x,y) = y/x$ podziały ω_n'' trapezu P prostymi: $y = \frac kn x$, $x = \frac kn$, $k\in\mathbb{Z}$ dają: $s_{\omega_n''} = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}\cdot\frac6n = 3\cdot\frac{n-1}{n}$, $S_{\omega_n''} = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac kn\cdot\frac6n = 3\cdot\frac{n+1}{n}$, więc $\iint\limits_P \frac yx = 3$.

Uwaga. Dla innych funkcji 'wygodne' są inne podziały P; np. dla $f(x,y) = (2x-y)^3$ – podział prostymi: $y = 2x + \frac kn$, $x = \frac kn$, $k\in\mathbb{Z}$. Dla $f(x,y) = 2x + y^3$ trudno o 'wygodny' podział; później zobaczymy jak rachunek całkowy 'załatwia' ten problem.

Przykład. $\iint\limits_P f$ gdzie $f(x,y) = x^2+y^2$ i P – koło o środku $(0,0)$ i promieniu R.

Dla ustalonego n dzielimy koło na n^2 części: dla $i = j + (k-1)n$, $1\le j,k\le n$, niech

$$P_i = P_{j+(k-1)n} = \{(r\cos t, r\sin t): R\sqrt{\tfrac{k-1}{n}} \le r \le R\sqrt{\tfrac kn}\ \wedge\ 2\pi\tfrac{k-1}{n} \le t \le 2\pi\tfrac kn\}$$

(zrób rysunek). Mamy $\Delta p_i = \Delta p_{j+(k-1)n} = \frac1n(\pi R^2\sqrt{\frac kn}^2 - \pi R^2\sqrt{\frac{k-1}{n}}^2) = \frac1{n^2}\pi R^2$.
Ponieważ na każdej z części k-tego pierścienia f 'zachowuje się jednakowo', więc

$$s_{\omega_n} = \sum_{k=1}^{n} R^2\tfrac{k-1}{n}\cdot n\tfrac{\pi R^2}{n^2} = \tfrac{n-1}{n}\cdot\tfrac12\pi R^4\ ,\qquad S_{\omega_n} = \sum_{k=1}^{n} R^2\tfrac kn\cdot n\tfrac{\pi R^2}{n^2} = \tfrac{n+1}{n}\cdot\tfrac12\pi R^4\ .$$

Zatem dla 'dużych' n wielkości $s_{\omega_n}, S_{\omega_n}$ są niemal równe $\frac12\pi R^4 = \iint\limits_{||(x,y)||\le R} x^2+y^2$.

Definicja. Niech $f(x,y)$ będzie funkcją ograniczoną na zbiorze domkniętym ograniczonym P. Dla podziału $\omega = \{P_1,\dots P_m\}$ na zbiory o rozłącznych wnętrzach i przy wyborze z nich punktów $(x_1,y_1),\dots,(x_m,y_m)$ przyjmujemy oznaczenia:

$$\sigma_\omega = \sum_{i=1}^{m} f(x_i,y_i)\cdot\Delta p_i,\ s_\omega = \sum_{i=1}^{m}\inf_{(x,y)\in P_i} f(x,y)\cdot\Delta p_i,\ S_\omega = \sum_{i=1}^{m}\sup_{(x,y)\in P_i} f(x,y)\cdot\Delta p_i,$$

gdzie $\Delta p_1 =$ pole zbioru P_i. Rozważając **wszystkie** podziały określamy:

$\underline{\iint\limits_P} f := \sup\limits_\omega s_\omega$ – całka dolna, $\quad\overline{\iint\limits_P} f := \inf\limits_\omega S_\omega$ – całka górna.

Gdy są równe, to tę liczbę nazywamy całką f na zbiorze P i piszemy $\iint\limits_P f$.

Obserwacja. Dla dowolnego podziału ω mamy: $\quad s_\omega\ \le\ \underline{\iint\limits_P} f\ \le\ \overline{\iint\limits_P} f\ \le\ S_\omega$.

Przykład. Są funkcje, dla których całka nie istnieje, np. dla funkcji $f(x,y) = 0$ gdy $x\in\mathbb{Q}$ i $f(x,y) = 1$ gdy $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, dla zbioru $P = [1,3]\times[1,3]$ i dowolnego podziału ω jest: $s_\omega = \sum\limits_{i=1}^{m} 0\cdot\Delta p_i = 0$, $S_\omega = \sum\limits_{i=1}^{m} 1\cdot\Delta p_i = 4$, więc $\underline{\iint\limits_P} f = 0 \ne 4 = \overline{\iint\limits_P} f$.

Tw. Jeśli $f(x,y)$ jest ciągła na P, to jest całkowalna na P, tzn. $\underline{\iint\limits_P} f = \overline{\iint\limits_P} f$, całka dolna i górna są równe. Ponadto, jeśli ω_n jest ciągiem podziałów P takim, że średnice największych zbiorów są zbieżne do 0, to $\lim\limits_{n\to\infty} s_{\omega_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{\omega_n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{\omega_n} = \iint\limits_P f$.

Twierdzenie.(o zamianie całki podwójnej na iterowaną)
Niech $P = \{(x,y): \varphi(x)\le y\le\psi(x),\ x\in[a,b]\}$, gdzie $\varphi(x),\psi(x)$ są f-cjami ciągłymi takimi, że $\varphi(x)\le\psi(x)$ dla $x\in[a,b]$. Wtedy dla funkcji $f(x,y)$ całkowalnej na zbiorze P mamy $\iint\limits_P f(x,y) = \int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx$.