Analiza matematyczna A3, Przykady $\iint\limits_P f\, dP$, $\iiint\limits_V f\, dV$

Takich zadań nie będzie na najbliższej kartkówce, ale będą podobne

1. Przedstaw całkę $J = \iint\limits_P xy\, dP$ jako całkę iterowaną we współrzędnych

a) biegunowych **b)** kartezjańskich,

gdy P jest największym z obszarów ograniczonych liniami $y+|x| = 0$, $x^2+y^2+2y = 0$. Oblicz też wartość J.

Rozwiązanie zad. 1

Po zrobieniu rysunku widać, że $P = \{(x,y) : y \leq -|x| \ \wedge x \in [-1,1]\}$ skąd

ad b) $J = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1-\sqrt{1^2-x^2}}^{-|x|} xy\, dy \right) dx$

Widać też, że P we współrzędnych biegunowych można zapisać:
$P = \{(r,\varphi) : \varphi \in [\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi] \ \wedge \ 0 \leq r \leq 2\sin(\varphi - \pi)\}$ skąd

ad a) $J = \displaystyle\int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \left(\int_0^{2\sin(\varphi-\pi)} r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi \cdot r\, dr \right) d\varphi$

Obliczamy (z a))

$$J = \int\limits_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \left(\int\limits_0^{2\sin(\varphi-\pi)} r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi \cdot r\, dr \right) d\varphi = \int\limits_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \left(\int\limits_0^{-2\sin(\varphi)} r^3 \cos\varphi \sin\varphi\, dr \right) d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \left[\frac{1}{4} r^4 \cos\varphi \sin\varphi \right]_0^{-2\sin(\varphi)} d\varphi = \int\limits_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} 4\cos\varphi \sin^5\varphi\, d\varphi = \left[\frac{4}{6} \sin^6\varphi \right]_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} = 0.$$

Uwaga. Z symetrii P i własności funkcji xy widać (bez rachunków) $J = 0$.

2. Przedstaw całkę $I = \iiint\limits_V x^2+y^2+z^2\, dV$ jako całkę iterowaną we współrzędnych

a) cylindrycznych **b)** sferycznych **c)** kartezjańskich,

gdy V jest mniejszą z brył ograniczonych pow. $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2+z^2 = 4$. Oblicz też wartość I.

Rozwiązanie zad. 2

Najpierw ogladamy V w przecięciu z płaszczyzną $y = 0$: $z = \sqrt{3} \cdot |x|$, $x^2+z^2 = 4$.
Widać część koła. *[zrób rysunek!]*
Po zakręceniu tym wokół osi OZ, widać... rożek z gałką lodów.
Zobacz jaki jest kąt tego rożka. *[zrób rysunek!]*

Zatem $V = \{(x,y,z) : \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$.

Przed rachunkami zobaczmy gdzie powierzchnie się stykają:
układ równań $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2} \wedge x^2+y^2+z^2 = 4$ *[zrób rysunek!]*
jest równoważny z układem $x^2+y^2 = 1 \wedge z = \sqrt{3}$.
(Stąd: rzutem V na pł OXY jest koło $x^2+y^2 \leq 1$, czego formalnie nie wykorzystamy.)

ad c) $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1^2-x^2}}^{\sqrt{1^2-x^2}} \left(\int_{\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} x^2+y^2+z^2\, dz \right) dy \right) dx$

ad a) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{4-r^2}} r^2+h^2 \cdot r\, dh \right) dr \right) d\varphi$

ad b) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/6} \left(\int_0^2 r^2 \cdot r^2 \sin\varphi\, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$

Liczyć warto na pewno z postaci w b):

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^{\pi/6} \left(\int\limits_0^2 r^2 \cdot r^2 \sin\varphi\, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta = \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^{\pi/6} \left[\frac{1}{5} r^5 \sin\varphi \right]_0^2 d\varphi \right) d\vartheta$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[-\frac{2^5}{5} \cos\varphi \right]_0^{\pi/6} d\vartheta = \left[-\frac{2^5}{5} (\cos\frac{\pi}{6} - \cos 0) \cdot \vartheta \right]_0^{2\pi} = \frac{32}{5}(2-\sqrt{3})\pi$$