Analiza matematyczna A3, Notatki biegunowe

Zadania dodatkowe (Całki w układzie biegunowym, sferycznym i cylindrycznym)

1. Zapisz całkę podwójną $\iint_S \; f(x,y)$ jako całkę iterowaną (lub sumę całek iterowanych) w układzie biegunowym, gdy:

a) $S = \{(x,y) : x^2+y^2 \le \pi \wedge x, y < 0\}$ **b)** $S = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4 \wedge x < |y|\}$

c) $S = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4x \;\wedge\; x < |y|\}$ **d)** $S = \{(x,y) : 1 < x^2+y^2 \le 4x\}$

e) $S = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4x \;\wedge\; x > |y|\}$

f) $S = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4x \;\wedge\; x^2+y^2 \le 4\}$

g) $S = \{(x,y) : x^2+y^2 \ge 4x \;\wedge\; x^2+y^2 \le 4\}$

h) $S = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4 \wedge |x| < 1\}$ **i)** $S = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4 \wedge |x| > 1\}$

j) $S = \{(x,y) : 1 < x^2+y^2 \le 9 \;\wedge\; |y| < 2\}$

k) $S = \{(x,y) : 1 < x^2+y^2 \le 9 \;\wedge\; |x| > 2\}$

l) $S = \{(x,y) : 4 < x^2+y^2 \le 9 \;\wedge\; |y| < 2\}$

m) $S = \{(x,y) : 4 < x^2+y^2 \le 9 \;\wedge\; |y| < 1\}$

n) $S = \{(x,y) : 1 < x^2+y^2 \le 4 \;\wedge\; x^2+y^2 \le 2y\}$

o) $S = \{(x,y) : 1 < x^2+y^2 \le 4 \;\wedge\; x^2+y^2 \ge 2x\}$

p) $S = \{(x,y) : 4 < x^2+y^2 \le 9 \;\wedge\; y < \sqrt{3}|x|\}$

q) $S = \{(x,y) : 1 < x^2+y^2 \le 4 \;\wedge\; 1 < x < 2|y|\}$

2. Zapisz całkę potrójną $\iiint_W \; f(x,y,z)$ jako całkę iterowaną (lub sumę całek iterowanych) w układzie sferycznym i cylindrycznym, gdy:

a) $W = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le \sqrt{17} \;\wedge\; x,y,z \le 0\}$

b) $W = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 4 \;\wedge\; z^2 < x^2+y^2 \;\wedge\; z < 0\}$

c) $W = \{(x,y,z) : 2x^2+2y^2 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\}$

d) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3_+ : 2x^2+2y^2 \le x^2+y^2+z^2 \le 4 \;\wedge\; z^2 < 2x^2+2y^2\}$

e) $W = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 4 \;\wedge\; |z| < 1\}$

f) $W = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 4 \;\wedge\; z^2 < 12\}$

g) $W = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1 \;\wedge\; x^2+y^2+z^2 \le 4\}$

h) $W = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \ge 3 \;\wedge\; x^2+y^2+z^2 \le 4\}$

3. Zapisz całkę potrójną $\iiint_U \; f(x,y,z)$ jako całkę iterowaną (lub sumę całek iterowanych) w układzie sferycznym lub cylindrycznym (wybierz wygodniejszy), gdy:

a) $U = \{(x,y,z) : 2x^2+2y^2 \le z^2 \le 3x^2+3y^2 \le 27\}$

b) $U = \{(x,y,z) : 2x^2+2y^2+2z^2 \le 4z^2 \le 3x^2+3y^2+3z^2 \le 27\}$

c) $U = \{(x,y,z) : 2x^2+2y^2 \le z \le 3x^2+3y^2 \le 27\}$

d) $U = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 2z \le 2x^2+2y^2\}$

e) $U = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 4z \le 4x^2+4y^2\}$

f) $U = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 4z \le 4x^2+4y^2 < 1\}$

h) $U = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 4z \;\wedge\; x^2+y^2+z^2 \le 4\}$

i) $U = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \ge 4z \;\wedge\; x^2+y^2+z^2 \le 4\}$

j) $U = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 4z \;\wedge\; x^2+y^2+z^2 \ge 4\}$

4. Sprawdź (i narysuj)

$$\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{z} \left(\int_{\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} f(x,y,z)\, dy \right) dx + \int_z^{\sqrt{4-z^2}} \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2-z^2}} f(x,y,z)\, dy \right) dx \right) dz =$$

$$= \int_0^{2} \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} f(r\cos\vartheta\sin\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\; d\vartheta \right) d\varphi \right) dr =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_0^{2} \left(\int_0^{\pi/2} f(r\cos\vartheta\sin\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\; d\vartheta \right) dr \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_h^{\sqrt{4-h^2}} \left(\int_0^{\pi/2} f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, h)\cdot r\; d\vartheta \right) dr \right) dh =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_h^{\sqrt{4-h^2}} f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, h)\cdot r\; dr \right) d\vartheta \right) dh =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{r} f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, h) r\; dh \right) dr + \int_{\sqrt{2}}^{2} \left(\int_0^{\sqrt{4-r^2}} f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, h) r\; dh \right) dr \right) d\vartheta$$