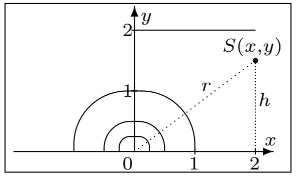
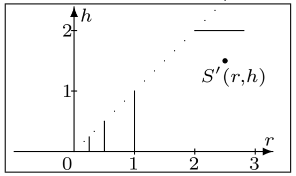
Analiza matematyczna A3, Zmiana ukł. współrzędnych.

Wypełniańka. (ziemia, to linia $y = 0$) Samolot nadlatuje nad lotnisko $L = (0, 0)$; jest w punkcie $S = (x, y)$, gdzie $x = 2, y = \frac{3}{2}$. Pilot odczytuje z przyrządów:
r – odległość od lotniska L, h – wysokość nad ziemią,
co zapisuje: $S' = (r, h) = (\frac{5}{2}, 2)$.





Oczywiście mamy tu zależność funkcyjną: $\vec{F}(S) = S'$, która parze liczb (x, y) przypisuje **parę** liczb (r, h) według wzorów: $r = \sqrt{...^2 + ...^2}$, $h = ...$.
W tym przekształceniu obrazem półokręgu o środku $(0, 0)$ i promieniu 1 jest ... o końcach $(..., ...)$, $(..., ...)$; obrazem odcinka $[0, 2] \times \{2\}$ jest odcinek o długości ....
Dziedziną $\vec{F}$ jest $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$; zbiorem wartości jest obszar kąta o ramionach ... i ... .
$\vec{F}$ nie jest różnowartościowa, bo np.: $\vec{F}(..., ...) = \vec{F}(..., ...)$. Jednak $\vec{F}$ ograniczona do pierwszej ćwiartki $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ jest '1-1' i przekształca ten zbiór na obszar ....
Zatem przy tym ograniczeniu (x, y) można wyznaczyć poprzez (r, h) wzorami:

$$x = x(r, h) = \sqrt{...^2 - ...^2},\ y = y(r, h) = ...$$

Oznaczmy przez $\vec{G}(r, h) = (x, y)$ tę funkcję (odwrotną do ograniczenia funkcji $\vec{F}$).
Jej jakobianem nazywamy wyznacznik:

$$J = \frac{D(x, y)}{D(r, h)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial h} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial h} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial y}{\partial h} - \frac{\partial x}{\partial h} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

i w tym przypadku mamy: $J =$ .... (Uwaga. Jakobian zależy od ... i ... .)

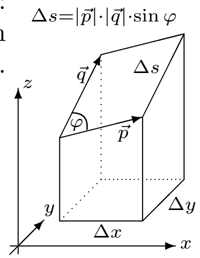
Można też obliczyć jakobian przekształcenia $\vec{F}$; jest on równy ....

0*. Powtórz wypełniankę, dla samolotu w półprzestrzeni $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$, którego współrzędne kartezjańskie (x, y, z) można zamienić na współrzędne (r_1, r_2, h), gdzie r_1, r_2 to odległości od radarów: $L_1 = (1, 0, 0)$, $L_2 = (-1, 0, 0)$ i h - wysokość nad ziemią.

Pole płata (powierzchni)

Wyznaczymy pole powierzchni płata – to jest części wykresu funkcji $z = f(x, y)$ nad obszarem $P \subset \mathbb{R}^2$ domkniętym i ograniczonym, zawartym w dziedzinie funkcji f (przy założeniu ciągłości pochodnych cząstkowych f'_x, f'_y).

Pomysł: Bierzemy 'drobny' podział $\omega = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ obszaru P 'głównie' na prostokąty o polach Δp_i ('głównie' tzn. elementy podziału, które nie są prostokątami mają **łącznie** 'znikome' pole). Wybieramy punkty $(x_i, y_i) \in P_i$ i w przestrzeni prowadzimy płaszczyzny styczne do wykresu f w punktach $(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$. Części tych płaszczyzn utworzone nad prostokątami P_i wyglądają jak karteczki (równoległoboki) oblepiające tę powierzchnię. Suma ich pól $\sum_i \Delta s_i$ przybliża szukane pole płata.



Pole Δs pojedynczego równoległoboku rozpiętego przez wektory $\vec{p}, \vec{q}$:
Płaszczyzna styczna jest wyznaczona przez gradient funkcji f, zatem te wektory mają współrzędne: $\vec{p} = [\Delta x, 0, f'_x \cdot \Delta x]$, $\vec{q} = [0, \Delta y, f'_y \cdot \Delta y]$.
Stąd obliczamy pole (korzystając z prostoty iloczynu skalarnego):

$$\Delta s = |\vec{p}||\vec{q}| \sin\varphi = |\vec{p}||\vec{q}|\sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 - (|\vec{p}||\vec{q}|\cos\varphi)^2} =$$

$$= \sqrt{((\Delta x)^2 + (f'_x\Delta x)^2)((\Delta y)^2 + (f'_y\Delta y)^2) - (f'_x\Delta x \cdot f'_y\Delta y)^2} =$$

$$= \Delta x \cdot \Delta y \cdot \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2} \quad \text{(po krótkich rachunkach)}$$

Uwaga. Powyżej pominięte są indeksy '$_i$', pochodne cząstk. liczone są w punktach (x_i, y_i).

Zatem pole płata f nad P jest w przybliżeniu równe

$$\sum_i \Delta s_i = \sum_i \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2}\Delta x\Delta y = \sum_i \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2}\Delta p_i \approx \boxed{\iint_P \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2}}$$

'$\approx$' oznacza tu: gdy weźmiemy ciąg coraz drobniejszych podziałów (o maksymalnych średnicach zbieżnych do 0), to granica sum $\sum_i \Delta s_i$ jest zbieżna do całki (z def. całki).

Przykład. Pow. płata $f(x, y) = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}})$ nad trójkątem P o wierzchołkach: $(0, 0), (0, 1), (7, 1)$, czyli nad obszarem: $0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le 7y$:

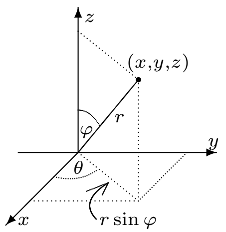
$$\iint_P \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2} = \iint_P \sqrt{1 + x + y} = \int_0^1 \left(\int_0^{7y} \sqrt{1 + x + y}dx \right) dy = ... = \frac{25}{3} - \frac{16}{15}\sqrt{2}\ .$$

Przykład. Pow. płata $f(x, y) = xy$ nad $P = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 9, 0 \le x \le y\}$ to

$$\iint_P \sqrt{1 + y^2 + x^2} \overset{\text{współ. bieg.}}{=} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_0^3 \sqrt{1 + r^2} \cdot r dr \right) d\varphi = \frac{\pi}{4} \cdot \left[\frac{1}{3}(1 + r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = \frac{\pi}{12}(10\sqrt{10} - 1)$$

Uwaga. Można pomyśleć o przybliżaniu powierzchni płata w inny sposób: wybieramy na płacie skończenie wiele punktów 'gęsto rozmieszczonych (dużo)'; z nich tworzymy trójkąty (triangulację); suma pól tych trójkątów powinna przybliżać pole płata — **TEN POMYSŁ JEST ZŁY**, zły nawet w przypadku powierzchni bocznej walca; szczegóły (i rysunki) należy znaleźć np. w III tomie Fichtenholza, rozdział XVII, §2.

Układ sferyczny



Podpisując długości kresek za pomocą r, φ, θ otrzymujemy wzór

$$x = r\sin\varphi\cos\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ z = r\cos\varphi$$

przekształcenia z 'nieskończonego pół-prostopadłościanu'

$$0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ r \ge 0$$

(w układzie $Or\varphi\theta$) na całą przestrzeń $\mathbb{R}^3$ (w układzie $Oxyz$).

W tym przekształceniu obrazem prostokąta: $r = 0$, $0 \le \varphi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$ jest punkt $(0, ..., ...)$, a obrazem prostokąta $r = 3$, $0 \le \varphi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$ jest sfera o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = ...$ Obrazem półprostej $\varphi = \frac{\pi}{4} = \phi$ jest półprosta $x = y =$ ...... ,

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

Inne przykłady (strzałka $\to$ oznacza 'jest przekształcane na'):
$\varphi = 0 \to$ półoś $O...$, $\quad \varphi = \frac{\pi}{...} \to$ pow. stożka $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $\quad \varphi = \frac{\pi}{2} \to$ pł. $z = ...$,
$r \in$ ... $\to$ obszar $4 < x^2+y^2+z^2 \le 9$, $\quad r = 3\cos\varphi \to$ kula $x^2+y^2+(z-...)^2 \le ...$,
$r = -3\cos\varphi \to$ kula $x^2+y^2+(z-...)^2 \le ...$, $\quad r = \frac{4}{\cos\varphi} \to$ płaszczyzna $z = ...$.

Wnętrze 'pół-prostopadłościanu' jest przekształcane różnowartościowo na $\mathbb{R}^3 \setminus ....$
Łatwo obliczymy jakobian tego przekształcenia (stosując wielokrotnie tw. Pitagorasa):

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_\theta \\ y'_r & y'_\varphi & y'_\theta \\ z'_r & z'_\varphi & z'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\varphi$$

Przykład. Różnicy kul $V = \{(x,y,z) : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\}$ w ukł. sferycznym odpowiada obszar $V' = \{(r,\varphi,\theta) : 1 \le r \le 2\}$ (prostopadłościan w ukł. sfer.), więc:

$$\iiint_V z^2 = \iiint_{V'} r^2\cos^2\varphi \cdot r^2\sin\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_1^2 r^4\cos^2\varphi\sin\varphi\,dr\right)d\varphi\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left[\tfrac{1}{5}r^5\cos^2\varphi\sin\varphi\right]_1^2 d\varphi\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\tfrac{31}{5}\left[-\tfrac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^{\pi}d\theta = \tfrac{31}{5}\int_0^{2\pi}\tfrac{2}{3}d\theta = \tfrac{124}{15}\pi$$

Przykład. Obszarowi $V = \{(x,y,z) : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9 \wedge z^2 \ge x^2+y^2\}$ w ukł. sfer. odpowiada prostopadłościan $V' = \{(r,\varphi,\theta) : 1 \le r \le 3 \wedge 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\}$, więc:

$$\iiint_V x^2 = \iiint_{V'} r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta \cdot r^2\sin\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/4}\left(\int_1^3 r^4\sin^3\varphi\cos^2\theta\,dr\right)d\varphi\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/4}\left[\tfrac{1}{5}r^5\sin^3\varphi\cos^2\theta\right]_1^3\,d\varphi\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/4}\tfrac{242}{5}\sin^3\varphi\cos^2\theta\,d\varphi\right)d\theta =$$

(ze 'ściągi' ściągamy całkę nieoznaczoną: $\int\sin^3 t\,dt = \frac{1}{3}\cos^3 t - \cos t$)

$$= \int_0^{2\pi}\left[\tfrac{242}{5}\left(\tfrac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi\right)\cos^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta = \int_0^{2\pi}\tfrac{242}{5}\left(\tfrac{\sqrt{2^3}}{3\cdot 2^3} - \tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{1}{3} + 1\right)\cos^2\theta\,d\theta =$$

(ze 'ściągi' ściągamy całkę nieoznaczoną: $\int\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\cos t\sin t + \frac{1}{2}t$)

$$= \int_0^{2\pi}\tfrac{121(8-5\sqrt{2})}{30}\cos^2\theta\,d\theta = \tfrac{121(8-5\sqrt{2})}{30}\left[\tfrac{1}{2}\cos\theta\sin\theta + \tfrac{1}{2}\theta\right]_0^{2\pi} = \tfrac{121(8-5\sqrt{2})}{30}\pi\ .$$

Przykład. Ponieważ obszar $V = \{(x,y,z) : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9\}$ jest symetryczny względem płaszczyzny $x = 0$, więc (bez rachunków) $\iiint_V x^3 - x\cdot yz = 0$.

Przykład. By obliczyć objętość obszaru V ograniczonego powierzchnią o równaniu $(x^2+y^2+z^2)^2 = 8z$ zauważmy najpierw, że $z \ge 0$ i że zbiór ten jest bryłą obrotową względem osi Oz. Ta powierzchnia ma w ukł. sferycznym postać: $(r^2)^2 = 8\cdot r\cos\varphi$, czyli $r = 2\sqrt[3]{\cos\varphi}$, więc odpowiadający obszar V' jest opisany przez warunki: $0 \le r \le 2\sqrt[3]{\cos\varphi}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Zatem

$$obj.V = \iiint_V 1 = \iiint_{V'} 1\cdot r^2\sin\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\sqrt[3]{\cos\varphi}} r^2\sin\varphi\,dr\right)d\varphi\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\left[\tfrac{1}{3}r^3\sin\varphi\right]_0^{2\sqrt[3]{\cos\varphi}}d\varphi\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\tfrac{1}{3}2^3\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\tfrac{4}{3}\sin 2\varphi\,d\varphi\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left[-\tfrac{2}{3}\cos 2\varphi\right]_0^{\pi/2}d\theta = \int_0^{2\pi}\tfrac{4}{3}\,d\theta = \tfrac{8}{3}\pi\ .$$

Przykład. By obliczyć objętość obszaru V będącego częścią wspólną kul

$$x^2+y^2+z^2 \le 4 \quad\text{i}\quad x^2+y^2+(z-2)^2 \le 4,$$

zapiszmy ten obszar w układzie sferycznym (zrób rysunki):
zbiór ten podzielmy powierzchnią stożka $\varphi = \frac{\pi}{3}$ na dwie części:

$$0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{3},\ 0 \le r \le 2 \quad\text{oraz}\quad \tfrac{\pi}{3} \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 2\cdot 2\cos\varphi\ .$$

Zatem

$$obj.V = \iiint_V 1 = \iiint_{\substack{0\le\varphi\le\frac{\pi}{3} \\ 0\le r\le 2}} 1\cdot r^2\sin\varphi + \iiint_{\substack{\frac{\pi}{3}\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \\ 0\le r\le 4\cos\varphi}} 1\cdot r^2\sin\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/3}\left(\int_0^2 r^2\sin\varphi\,dr\right)d\varphi\right)d\theta + \int_0^{2\pi}\left(\int_{\pi/3}^{\pi/2}\left(\int_0^{4\cos\varphi} r^2\sin\varphi\,dr\right)d\varphi\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/3}\tfrac{8}{3}\sin\varphi\,d\varphi\right)d\theta + \int_0^{2\pi}\left(\int_{\pi/3}^{\pi/2}\tfrac{64}{3}\cos^3\varphi\sin\varphi\,d\varphi\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[-\tfrac{8}{3}\cos\varphi\right]_0^{\pi/3}d\theta + \int_0^{2\pi}\left[-\tfrac{64}{3\cdot 4}\cos^4\varphi\right]_{\pi/3}^{\pi/2}d\theta = \int_0^{2\pi}\tfrac{4}{3}\,d\theta + \int_0^{2\pi}\tfrac{1}{3}\,d\theta = \tfrac{10}{3}\pi\ .$$

Można też inaczej zauważając najpierw, że płaszczyzna $z = 1$ dzieli V na dwie przystające części– czasze. Górną z tych czaszy opiszemy w ukł. sferycznym:

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3},\quad \frac{1}{\cos\varphi} \le r \le 2\ .$$

Zatem

$$obj.V = \iiint_V 1 = 2\cdot\iiint_{\substack{0\le\varphi\le\frac{\pi}{3} \\ \frac{1}{\cos\varphi}\le r\le 2}} 1\cdot r^2\sin\varphi = 2\cdot\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/3}\left(\int_{1/\cos\varphi}^{2} r^2\sin\varphi\,dr\right)d\varphi\right)d\theta =$$

$$= \{\text{ po podobnych rachunkach }\} = \tfrac{10}{3}\pi\ .$$