

ANALIZA MATEMATYCZNA A3. WYPEŁNIAŃKA DO LISTY 7.

Zadanie 1. Niech $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq 4\}$ i niech funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem $f(x, y) = x^2 + 2|y - x| + y^2 - 8y + 25$. Znajdź wartość najmniejszą i największą tej funkcji i podaj wszystkie argumenty, w których te wartości są przyjmowane.

Rozwiązanie, wersja A

D jest , czyli zbiorem ograniczonym i domkniętym, f jest , więc z tw. Weierstrassa wynika, że w. największa i w. najmniejsza są przyjmowane w D .

Funkcja f jest C^1 w zbiorze $W = \text{wnętrze } D \text{ bez odcinka o końcach}$

$\diamond_a$ Punkty krytyczne w $W \cap \{(x, y) : x > y\}$:

$$\begin{cases} f'_x = \dots \\ f'_y = \dots \end{cases} \begin{cases} \dots = \dots \\ \dots = \dots \end{cases} \begin{cases} \dots = \dots \\ \dots = \dots \end{cases} \begin{cases} \dots = \dots \\ \dots = \dots \end{cases}$$

W tym obszarze p. krytycznymi są:

$\diamond_b$ Punkty krytyczne w $W \cap \{(x, y) : x < y\}$:

$$\begin{cases} f'_x = \dots \\ f'_y = \dots \end{cases} \begin{cases} \dots = \dots \\ \dots = \dots \end{cases} \begin{cases} \dots = \dots \\ \dots = \dots \end{cases} \begin{cases} \dots = \dots \\ \dots = \dots \end{cases}$$

W tym obszarze p. krytycznymi są:

$\heartsuit_{y=0}$ Punkty krytyczne w $D \cap \{(x, y) : y = 0\}$:

Niech $g : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x, 0) = x^2 + 2|0 - x| + 0^2 - 8 \cdot 0 + 25 = (x + \dots)^2 + \dots$
 g jest f. kwadr. rosnącą na (tu mini rysunek), więc p. krytycznymi są:

$\heartsuit_{y=4}$ Punkty krytyczne w $D \cap \{(x, y) : y = 4\}$:

Niech $g : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ i $g(x) = f(x, 4) = \dots = (x - \dots)^2 + \dots$
 g jest f. kwadratową (p. rys.), więc p. krytycznymi są: $(0, 4)$, $(\dots, \dots)$, $(4, \dots)$.

$\heartsuit_{y=x}$ Punkty krytyczne w $D \cap \{(x, y) : y = x\}$:

Niech $g : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ i $g(x) = f(x, x) = \dots = \dots$
 g jest f. kwadratową (p. rys.), więc p. krytycznymi są: $(0, 0)$, $(\dots, \dots)$, $(4, \dots)$.

$\heartsuit_{x=0}$ Punkty krytyczne w $D \cap \{0\} \times \mathbb{R}$:

Niech $g : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ i $g(y) = f(0, y) = 0^2 + 2|y - 0| + y^2 - 8y + 25 = (y - 3)^2 + \dots$
 g jest f. kwadratową (p. rys.), więc p. krytycznymi są:

$\heartsuit_{x=4}$ Punkty krytyczne w $D \cap \{4\} \times \mathbb{R}$:

Niech $g : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ i $g(y) = f(4, y) = 4^2 + 2|y - 4| + y^2 - 8y + 25 = (y - 5)^2 + \dots$
 g jest f. malejącą (p. rys.), więc p. kryt. to końce: $p_3 = (4, 0)$, $p_6 = (4, \dots)$.

Podsumowanie: $\diamond_a \cup \diamond_b \cup \heartsuit$

W zbiorze wszystkich p. krytycznych szukamy w. największą i najmniejszą:
 $f(0, 0) = \dots$, $f(4, 0) = \dots$, $f(0, 4) = \dots$, $f(4, 4) = \dots$,

Odpowiedź: $\sup_D f = \dots = f(\dots, \dots)$ oraz $\inf_D f = \dots = f(\dots, \dots)$.

Rozwiązanie, wersja B

D jest , czyli zbiorem ograniczonym i domkniętym, f jest , więc z tw. Weierstrassa wynika, że w. największa i w. najmniejsza są przyjmowane w D .

Funkcja f jest C^1 w zbiorze $W = \text{wnętrze } D \text{ bez odcinka o końcach}$

$\diamond_a$ Punkty krytyczne w $W \cap \{(x, y) : x > y\}$:

$$\begin{cases} f'_x = \dots \\ f'_y = \dots \end{cases} \begin{cases} \dots = \dots \\ \dots = \dots \end{cases} \begin{cases} \dots = \dots \\ \dots = \dots \end{cases} \begin{cases} \dots = \dots \\ \dots = \dots \end{cases}$$

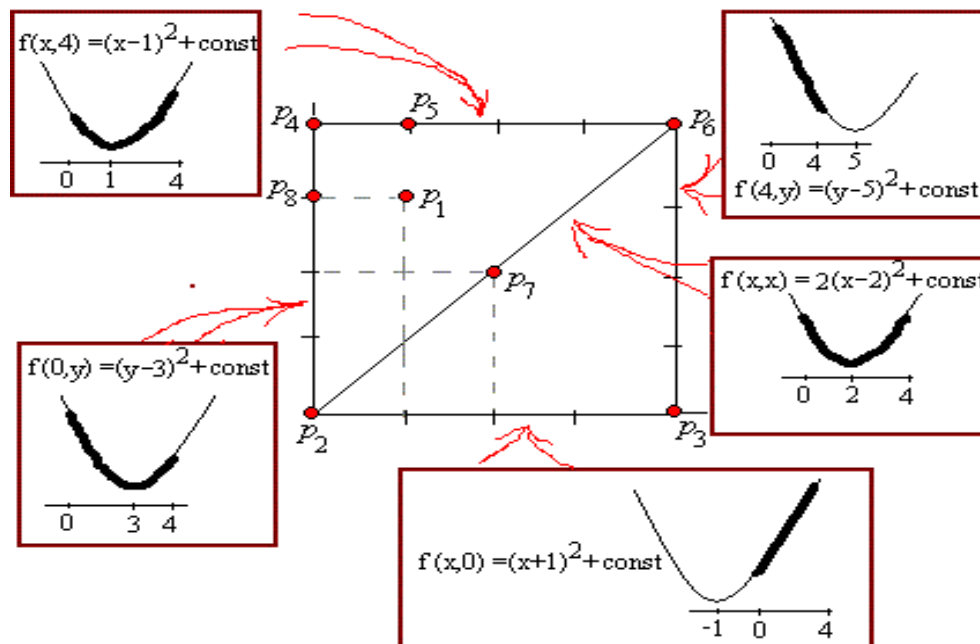
W tym obszarze p. krytycznymi są:

$\diamond_b$ Punkty krytyczne w $W \cap \{(x, y) : x < y\}$:

$$\begin{cases} f'_x = \dots \\ f'_y = \dots \end{cases} \begin{cases} \dots = \dots \\ \dots = \dots \end{cases} \begin{cases} \dots = \dots \\ \dots = \dots \end{cases} \begin{cases} \dots = \dots \\ \dots = \dots \end{cases}$$

W tym obszarze p. krytycznymi są:

$\heartsuit$ Punktami krytycznymi w $D \setminus W$ są: $p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8$ odszukane tak, jak pokazuje poniższy rysunek:



Podsumowanie: $\diamond_a \cup \diamond_b \cup \heartsuit$

W zbiorze wszystkich p. krytycznych szukamy w. największą i najmniejszą:
 $f(0, 0) = \dots$, $f(4, 0) = \dots$, $f(0, 4) = \dots$, $f(4, 4) = \dots$,

Odpowiedź: $\sup_D f = \dots = f(\dots, \dots)$ oraz $\inf_D f = \dots = f(\dots, \dots)$.

