Analiza matematyczna A3. Lista 10.

1. Oblicz całki krzywoliniowe pierwszego rodzaju (nieskierowane)

$\int_A |x| + y\, ds,\ A = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\},\qquad \int_B x(\mathrm{arctg} y)^7\, ds,\ B = \{(x,x^2) : |x| \le 1\}$

$\int_C x + y\, ds,\ C = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 2x + 4y\},\ \int_C xy\, ds,\quad \int_D \frac{ds}{x^2},\ D = A \cap ([\frac{1}{2}, 2] \times \mathbb{R})$

$\int_E x^2 y\, ds,\ E = A \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)\qquad \int_F \frac{y}{\sqrt{4x^2+1}}\, ds,\ F = \{(x,x^2) : -1 \le x \le 2\},\ \int_F x\, ds$

$\int_G x + y + z\, ds$, G - odcinek łączący punkty $(1,2,3)$ i $(6,5,4)$, $\qquad \int_G xyz\, ds$

2. Oblicz: całki krzywoliniowe drugiego rodzaju (skierowane)

$\int_A (2x + 3y)dx + (4x + 5y)dy$, $\quad A$ – odcinek od $(0,1)$ do $(3,3)$

$\int_B (2x + y)dx + (2x - y)dy$, $\quad B$ – część paraboli $y = x^2$ od $(1,1)$ do $(2,4)$

$\int_C (x^2 + y)dx + (x - y)dy$, $\quad C$ – część paraboli $y^2 = x$ od $(1,-1)$ do $(1,1)$

$\int_D (x^2 + y)dx + (x - y)dy$, $\quad D$ – część paraboli $y^2 = x$ od $(1,1)$ do $(1,-1)$

$\int_\Gamma \vec{F} \circ d\vec{r}$, $\qquad$ dla: $\vec{F}(x,y) = (y,x)$ lub $\vec{F}(x,y) = (-y,x)$, lub $\vec{F}(x,y) = (y^2,x^2)$,

gdy Γ to: **e)** odcinek od $(0,-1)$ do $(2,2)$ **f)** łamana $(0,-1), (2,-1), (2,2)$

g) okrąg $x^2 + y^2 = 1$ **h)** okrąg o śr. (0,2) i pr. 2 **i)** okrąg o śr. (3,0) i pr.3

3. Znajdź masę pierwszego zwoju linii śrubowej $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ z = bt$ gdy gęstość w każdym punkcie jest proporcjonalna do kwadratu odległości od (0,0,0).

4. Wznacz pracę potrzebną do przeniesienia 1kg pokonując pole sił $\vec{F} = [x^2 - y, xy]$ wzdłuż linii $y^2 = 8x$ od punktu $A(0,0)$ do punktu $B(2,4)$.

5. Oblicz całki po pewnych dwóch drogach (łukach) od A do B.

a) $\int_\Gamma (\pi x + y)\, dx + (x - \sqrt{2}y)\, dy$, $\quad A = (0,1),\ B = (2,3)$

b) $\int_\Gamma (e^x + y)\, dx + (x + 2y)\, dy$, $\quad A = (0,1),\ B = (u,v)$

c) $\int_\Gamma y\, dx + (x + z)\, dy + y\, dz$, $\quad A = (-1,1,0),\ B = (u,v,w)$

d) $\int_\Gamma (\cos x + 2yz)dx + (\sin y + 2xz)dy + (z + 2xy)dz,\ A = (0,0,0),\ B = (\pi,\pi,\pi^{-1})$

6. Pokaż, że całki z zad. 5 zależą tylko od początku i końca łuku Γ.

7. Niech f, g, h będą ciągłymi funkcjami **jednej** zmiennej. Udowodnij, że całka $\int_\Gamma f(x)dx + g(y)dy + h(z)dz$ nie zależy od drogi Γ (zależy tylko od początku i końca).

8. Dla podanego pola wektorowego i obszaru Ω oblicz całki występujące po obu stronach wzoru Greena.

a) $(P(x,y), Q(x,y)) = (x,y),\quad \Omega = \{(x,y); x^2 \le y \le 1\}$

b) $(P(x,y), Q(x,y)) = (x,-y),\quad \Omega = \{(x,y); 1 + y^2 + x^2 \le 2x + 2y\}$

c) $(P(x,y), Q(x,y)) = (xy,0),\quad \Omega = \{(x,y); x,y \in [0,1],\ x^2 + y^2 \le 1\}$

d) $(P(x,y), Q(x,y)) = (xe^{x^2+y^2}, ye^{x^2+y^2})\quad \Omega = \{(x,y); x^2 + y^2 \le 1\}$

e) $(P(x,y), Q(x,y)) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}),\quad \Omega = \{(x,y); 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$,

Do e.) brzeg Ω to 2 okręgi: zewnętrzny skierowany przeciwzegarowo, wewnętrzny zegarowo

9. Zastosować wzór Greena do obliczenia całek (krzywe są skierowane przeciwzegarowo)

a) $\oint_{x^2+5y^2=17} x^{2004}e^{2005y}dx + x^{2005}e^{2005y}dy$ **b)** $\oint_{x^{1998}+y^{2000}=1} e^{(x+y)^7}dx + e^{(x+y)^7}dy$

10. Niech $K = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1, y \ge 0\}$, $L = \{(x,y) : x^2 \le 1, y = 0\}$, $M = \{(x,y) : y = |x| - 1, x^2 \le 1\}$ oznaczają krzywe skierowane od $(1,0)$ do $(-1,0)$. Oblicz: $\int_K P\, dx + Q\, dy$, $\int_M P\, dx + Q\, dy$ wiedząc, że

a) $Q'_x - P'_y = 6$ i $\int_L P\, dx + Q\, dy = 2$ **b)** $Q'_x - P'_y = x^{17}$ i $\int_L P\, dx + Q\, dy = \sqrt{2}$

* * *

P. Czy pole wektorowe ma potencjał? Jeśli tak, to oblicz je lub odgadnij.

a) $\vec{F}(x,y) = (x,y)$ **b)** $\vec{F}(x,y) = (y,x)$ **c)** $\vec{F}(x,y) = (x^2,y^2)$

d) $\vec{F}(x,y) = (y^2,x^2)$ **e)** $\vec{F}(x,y) = (xy^2, x^2y + y^3)$ **f)** $\vec{F}(x,y) = (ye^x, e^x)$

g) $\vec{F}(x,y) = (e^x - \sqrt{2}, \frac{1}{1+y^2} + \pi)$ **h)** $\vec{F}(x,y,z) = (2xyz, x^2z, x^2y + 1)$

i) $\vec{F}(x,y) = (e^y, xe^y + y)$ **j)** $P(x,y) = y^2e^{xy},\ Q(x,y) = (1 + xy)e^{xy}$

k) $\vec{F}(x,y,z) = (2xyz, x^2z, x^2y + 1)$ **l)** $P = yz,\ Q = xz,\ R = xy$

m) $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xz + 1, 2y(z + 1), x^2 + y^2 + 3z^2)$ **n)** $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,z,y)$

* * *

Ściąga.

$f(x,y)$ nazywamy potencjałem pola wektorowego $\vec{F} = (P,Q)$, gdy $P = \frac{\partial f}{\partial x},\ Q = \frac{\partial f}{\partial y}$.

$f(x,y,z)$ nazywamy potencjałem pola wektorowego $\vec{F} = (P,Q,R)$, gdy $\vec{F} = grad(f)$.

Twierdzenie Greena. Niech K będzie krzywą płaską skierowaną dodatnio (przeciwzegarowo) ograniczającą obszar Ω (bez 'dziur') i niech $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ będzie polem wektorowym określonym na Ω. Gdy funkcje $P(x,y), Q(x,y)$ mają ciągłe pochodne cząstkowe, to zachodzi $\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\omega = \int_K Pdx + Qdy$.