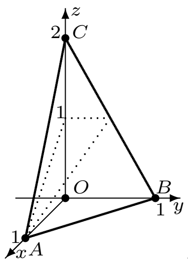
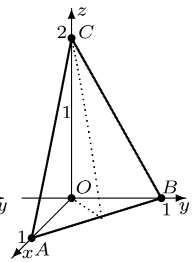
Analiza matematyczna A3. Lista 11.

1. Dla brzegu S czworościanu $0ABC$ (p.rys.) oblicz

a) $\iint_S e^{[x+y]}\,dS$ **b)** $\iint_S e^{[x-y]}\,dS$

c) $\iint_S e^{[x+z]}\,dS$ **d)** $\iint_S e^{[x+y+z]}\,dS$





1'. Poniższe całki opisują objętości pewnych ostrosłupów; opisz (słowami) te ostrosłupy

a) $\iint\limits_{ABC} z\,dS$ **b)** $\iint\limits_{ABC} x\,dS$ **c)** $\iint\limits_{ABC} x+y\,dS$

2. Oblicz (w których przykładach 'od razu' widać 0 ?)

a) $\iint\limits_{\substack{x+y+z=1\\x,y,z\geq 0}} xyz\,dS$ **b)** $\iint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=1\\x,y,z\geq 0}} xyz\,dS$ **c)** $\iint\limits_{\substack{(x+y)^2+z^2=1\\x,y,z\geq 0}} \sqrt{\frac{1-(x+y)^2}{1+(x+y)^2}}\,dS$

d) $\iint\limits_{|x|+|y|+|z|=1} xyz\,dS$ **e)** $\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} y^7\,dS$ **f)** $\iint\limits_{2|x|+3|y|+|z|=6} |x|\,dS$

g) $\iint\limits_{S} xy dS$, $S=\{(x,y,x^2+y^2) : x,y\in[0,1]\}$ **h)** $\iint\limits_{S} x+y\,dS$, $S=$ pow. $[0,1]^3$

i) $\iint\limits_{\Omega} x^2+y^2 dS$, $\Omega=\{(x,y,x^3-3xy^2) : x^2+y^2\leq 1\}$ **j)** $\iint\limits_{S} \operatorname{sgn}\,(z+|z|)\,dS$

3. Półsfera $x^2+y^2+z^2=4,\ z\geq 0$ ma gęstość g proporcjonalną do odległości od punktu (0,2) i ma największą wartość równą 17.

a) Wyznacz środek ciężkości tej półsfery.

b) Wyznacz jej energię kinetyczną, gdy obraca się ona względem prostej przechodzącej przez punkty $(0,0,2)$, $(0,2,2)$ ze stałą prędkością kątową ω.

.

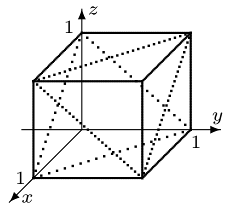
Analiza matematyczna A3. Notatki niezorientowane

Niech $f(x,y,z)$ będzie określona na powierzchni S. Podział $\omega=\{S_1,S_2,\ldots,S_m\}$ powierzchni S na 'prawie rozłączne płaty' o polach $|S_i|$ i wybór punktów $a_i\in S_i$ wyznacza pewne przybliżenie **całki powierzchniowej niezorientowanej**:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS\approx\sum_{i=1}^m f(a_i)\cdot|S_i|$$

Dokładniej: jeśli dla coraz drobniejszych podziałów (o średnicach zbieżnych do 0) sumy po prawej stronie są coraz bliżej pewnej liczby (niezależnie od wyboru punktów), to tę liczbę nazywamy całką powierzchniową niezorientowaną funkcji f po powierzchni S.

Interpretacje. $\iint_S f(x,y,z)\,dS$:
- masa powierzchni S, której gęstość w punkcie (x,y,z) ma wartość $f(x,y,z)$ [kg/m^2],
- koszt wyłożenia S kafelkami, których cena w (x,y,z) wynosi $f(x,y,z)$ [zł/m^2].
- objętość hałdy usypanej na S, której grubość wynosi $f(x,y,z)$ 'prostopadle' do S.



Na powierzchni S sześcianu $[0,1]^3$ $f(x,y,z)=[x+y+z]+\pi$ przyjmuje wartości: $0+\pi, 1+\pi,$ ... . Zatem

$\iint\limits_S [x+y+z]+\pi\,dS=(0+\pi)\cdot(3\cdot\frac12)+$ ...... $+$ ...... $=$ ....

Poniższa funkcja przyjmuje wartości $\neq 0$ tylko na 'górnej' ścianie

$\iint\limits_S [z]\cdot[y+7]dS=\iint\limits_{[0,1]^2\times\{1\}}[z]\cdot[y+7]dS=\iint\limits_{[0,1]^2\times\{1\}}[1]\cdot 7dS=7\cdot 1.$

Jeśli powierzchnia S jest wykresem funkcji gładkiej $g(x,y)$ określonej na obszarze D, czyli gdy $S=\{(x,y,z) : z=g(x,y),(x,y)\in D\}$, to całkę powierzchniową zamieniamy na całkę podwójną: $\boxed{\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS=\iint\limits_D f(x,y,g(x,y))\cdot\sqrt{1+(\frac{\partial g}{\partial x})^2+(\frac{\partial g}{\partial y})^2}}$

Przykład. $S=\{(x,y,z) : 2x+3y+z=6, x,y,z\geq 0\}$ jest wykresem f-cji $g(x,y)=6-2x-$... o dziedzinie $D=\{(x,y) : 0\leq x\leq 3, 0\leq y\leq$ .... $\}$; zatem

$\iint\limits_S (z-6)^2\,dS=\iint\limits_D (6-2x-3y-6)^2\cdot\sqrt{1+(-2)^2+\ \ldots\ }=\int\limits_0^3\int\limits_0^{\ldots\ldots}$ ...... $dy\,dx=$ ...

Przykład. Półsfera $S=\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=2z, z\geq 1\}$ jest wykresem funkcji $z(x,y)=1+\sqrt{1-\ \ldots\ -\ \ldots}$ o dziedzinie $D=\{(x,y) : \ldots^2+\ldots^2\leq\ldots\}$; zatem

$\iint\limits_S z\,dS=\iint\limits_D (1+\sqrt{1-\ \ldots\ldots}\,)\cdot\sqrt{1+(\ \ldots\ )^2+(\ \ldots\ )^2}=$ ...... (współrz. biegun.)