

ANALIZA MATEMATYCZNA A3. LISTA 12. Po co nam te wszystkie całki?

UWAGA. Poniżej 'wyznacznik' oznacza 'zapisz jako całkę iterowaną lub sumę całek iterowanych w układzie kartezjańskim i/lub cylindrycznym (biegunowym)'.

1. Wyznacznik objętość, pole powierzchni i łączną długość 'krawędzi' bryły  $V$ , gdy:
  - a)  $V$  jest ostrosłupem prawidł. czworokątnym, o wysokości 7, i boku podst. 4.
  - b)  $V$  jest częścią wspólną dwóch kul o promieniu  $R$ , których środki są w odległ.  $R$
  - c)  $V$  jest częścią wspólną dwóch kul o promieniu  $R$ , których środki są w odległ.  $\frac{3}{2}R$
  - d)  $V$  jest częścią wspólną dwóch walców o promieniu  $R$ , których osie są prostopadłe
2. Wyznacznik objętość i pole powierzchni torusa  $T$ , to jest bryły otrzymanej z obrotu wokół osi  $OZ$  koła  $K = \{(x, 0, z) : (x - R_d)^2 + z^2 \leq R_m^2\}$ , gdzie  $0 < R_m < R_d$ .

3. Powierzchnia  $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$  rozcina  $U_k$  na dwie części; mniejszą oznaczmy  $V_k$  dla

$$U_1 = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}, \quad U_2 = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\},$$

$$U_3 = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}. \quad U_4 = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1 - x\}.$$

- Wyznacznik
- a) objętość  $V_k$
  - b) pole pow.  $V_k$
  - c) długość 'krawędzi'  $V_k$
  - d) masę  $V_k$ , gdy gęstość jest sześcianiem odległości od osi  $OZ$
  - d')
  - d'') energię kinetyczną  $V_k$  kręcącego się wokół osi  $OZ$  w tempie 3 obroty na sekundę, gdy gęstość jest stała
  - d''') energię kinetyczną  $V_k$  kręcącego się wokół osi  $OX$  w tempie 4 obroty na sekundę, gdy gęstość jest stała
  - e) masę  $V_k$ , gdy gęstość jest sześcianiem odległości od powierzchni 'bocznej'
  - e')
  - e'') energię kinetyczną  $V_k$  kręcącego się wokół osi  $OZ$  w tempie 3 obroty na sekundę, gdy gęstość jest sześcianiem odległości od powierzchni 'bocznej'
  - f) środek ciężkości  $V_k$ , gdy gęstość kwadratem odległości od  $(0,0,0)$

4. Płaszczyzna  $z = x$  rozcina bryłę  $U_k$  na dwie części; mniejszą oznaczmy  $V_k$ , gdzie:

$$U_1 = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}, \quad U_2 = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\},$$

$$U_3 = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}, \quad U_4 = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

- Wyznacznik
- a) objętość  $V_k$
  - b) pole pow.  $V_k$
  - c) długość 'krawędzi'  $V_k$

- d) masę  $V_k$ , gdy gęstość jest sześcianiem odległości od  $(0,0,0)$
- d')
- d'') energię kinetyczną  $V_k$  kręcącego się wokół osi  $OX$  w tempie 3 obroty na sekundę, gdy gęstość jest sześcianiem odległości od  $(0,0,0)$
- e) masę  $V_k$ , gdy gęstość jest sześcianiem odległości od  $z = 0$
- e')
- e'') energię kinetyczną  $V_k$  kręcącego się wokół osi  $OZ$  w tempie 3 obroty na sekundę, gdy gęstość jest kwadratem odległ. od pł.  $x = 0$
- f) środek ciężkości  $V_k$ , gdy gęstość jest stała
- g) środek ciężkości  $V_k$ , gdy gęstość kwadratem odległ. od  $(0,0,0)$

Wsk. Znajdź rzut  $L'$  linii  $L$  będącej częścią wspólną  $U_k$  i pł.  $z = x$ .

