Analiza matematyczna A3. Lista 13. Drzewiej bywało.

1. Wyznacz długość krzywej zadanej parametrycznie
$$x(t) = 9^{-t}\cos(\pi t),\ y(t) = 9^{-t}\sin(\pi t),\ t \in [0, +\infty)\ .$$
Pod jakim kątem krzywa ta przecina okrąg o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu $\frac{1}{3}$?

2. Oblicz pole powierzchni i objętość bryły opisanej układem nierówności
$$z \geq 0,\quad y \geq z,\quad x^2 + y^2 \leq 4\ .$$

3. Oblicz $\int\limits_K 3x^2y\,dx + 2x^3\,dy$, gdzie K jest brzegiem obszaru $\{(x,y) : x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$

4. Wyznacz takie wartości parametrów $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$, by pole wektorowe $[z^8 + axz^7 + byz^7,\ z^8 + cxz^7 + dyz^7,\ z^8 + exz^7 + fyz^7\ ]$ miało potencjał. Oblicz go.

5. Wyznacz wartość największą i najmniejszą f-cji $f(x,y) = x^2 + 2x - 8 - y^2 + 4y$ określonej na $[-3,3]^2$. Podaj wszystkie punkty, w których te wartości są przyjmowane

6. Wyznacz środek ciężkości półkuli $x^2 + y^2 + z^2 \leq 6x,\ z \leq 0$, której gęstość g jest proporcj.do kwadratu odległości od osi półkuli i osiąga największą wartość 3.

7. Zbadaj ciągłość funkcji $f(x,y) = \begin{cases} (e^{x^2y^3} - 1)x^{-2} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 2y^3 - 5y^2 + 6y & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$ (uzasadnij).

B1. Niech l oznacza prostą w przestrzeni opisaną równaniem $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 0$. Płaszczyzny styczne do powierzchni $z + xy = x^3 + y$ w punktach $(0,1,1)$, $(-1,-2,-5)$ wycinają z prostej l odcinek. Znajdź jego długość.

B2. Oblicz objętość bryły opisanej układem nierówności
$$z \leq x^2 + y^2,\quad z + 4 \geq 2x^2 + 2y^2,\quad x \geq 0,\quad y \geq 0,\quad z \geq 0\ .$$

B3. **a)** Oblicz całkę krzywoliniową nieskierowaną $\int\limits_K |y|\,ds$ po okręgu $K = o((0,1),2)$.

b) Dokonaj zmiany kolejności całkowania: $\int\limits_0^2 \int\limits_{-x}^{x^2} x\,dy\,dx$. Oblicz obydwie całki.

B4. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x,y) = 3x + 4y + 5(x^2 + y^2)$ na zbiorze $Z = \left\{(x,y) : x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = x^2 + y^2\right\}$. Wyznacz wszystkie punkty, w których te wartości są przyjmowane.

B5. Kula $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ma gęstość g proporcjonalną do odległości od środka kuli i na brzegu kuli przyjmuje wartość $\frac{9}{8}$. Kula obraca się względem prostej przechodzącej przez punkty $(0,0,2)$, $(0,2,2)$ ze stałą prędkością kątową ω. Wyznacz energię kinet.

B6. Zbadaj istnienie granicy funkcji $f,\ g,\ h$ w punkcie $p_0 = (0,0)$, gdzie
$f(x,y) = \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$, $g(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$, $h(x,y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^4 + y^4}$. Uzasadnij odpowiedź.

C1. W ukł. współrzędnych zaznacz linie opisane parametrycznie (podaj ich nazwy)

a) $x(t) = |\cos(2\pi t)|,\ y(t) = \sin(2\pi t),\ t \in [-1,2]$.

b) $x(t) = 2\cos(2\pi t),\ y(t) = 3\sin^2(2\pi t),\ t \in [-1,2]$.

c) $x(t) = 2\cos^2(2\pi t),\ y(t) = 3\sin^2(2\pi t),\ t \in [-1,2]$.

C2. Przyjmijmy, że dziedziną f-cji $f(x,y) = x + y$ jest $D = \{(x,y) : x^2 + xy + y^2 = 1\}$. Zbadaj w których z poniższych punktów funkcja f osiąga maksima lokalne, a w których minima lokalne: $A(1,-1),\ B(1,1),\ C(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}),\ D(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$?

C3. Niech Γ oznacza brzeg obszaru $S = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x, y \geq 0\}$. Oblicz:

a) całkę krzywoliniową $\int\limits_\Gamma e^{[x+2]} + [y+3]\,ds$ **b)** całkę podwójną $\iint\limits_S e^{[x^2+y^2]}$

c) $\int\limits_\Gamma \left(3y^2 - e^{\sin x}\right)dx + \left(7x + \sqrt{y^4+1}\right)dy$, gdzie Γ jest okręgiem $x^2 + y^2 = 9$

d) $\int\limits_L y\,dx + z\,dy + x\,dz$, gdzie L jest łamaną ABC : $A(0,0,0),\ B(2,2,0), C(0,1,1)$.

C4. Oblicz masę stożka o pr. podstawy $R = 1$ i wys. $H = 2$, którego gęstość jest f. liniową odległości od podstawy: przy podstawie ma wartość 1 a przy wierzchołku 0.

D1. Wyznacz wszystkie punkty, w których ciągła jest funkcja
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^3y^2} - 1}{x^3} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 2y^3 + y^2 - 6y & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

D2. Linie: $x^2 + 2y^2 = 3$ i $y^5 + 3xy^2 + 2x^3 = 4$ przecinają się w punkcie $(1,-1)$. Pod jakim kątem?

D3. Drut D o kształcie półokręgu o promieniu 3 ma stałą gęstość równą 5. W jakiej odległości od końców D leży jego środek ciężkości?

D4. Oblicz pole części powierzchni sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ zawartej w zbiorze $Z = \{(x,y,z) : \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leq z\}$.

D5. Niech S oznacza stożek o promieniu podstawy 1 i wysokości 2. Niech ℓ oznacza prostą przechodzącą przez wierzchołek stożka i prostopadłą do jego osi. Stożek obraca się wokół ℓ w stałym tempie 5 obrotów na sekundę. Gęstość stożka jest wprost proporcjonalna do sześcianu odlegości od jego osi i 7 jest jej największą wartością. Oblicz (do końca) energię kinetyczną tego stożka (Wsk. w ukł. cylindr.).

D6. Niech $K = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\right\}$, $L = \left\{(x,y) : x^2 \leq 1, y = 0\right\}$, $M = \left\{(x,y) : y = |x| - 1, x^2 \leq 1\right\}$ oznaczają krzywe skierowane od $(-1,0)$ do $(1,0)$. Oblicz: $\int\limits_K P\,dx + Q\,dy$, $\int\limits_M P\,dx + Q\,dy$ wiedząc, że $Q'_x - P'_y = 5 + x^{17}$ i $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy = \sqrt{2}$.

D7. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą (o ile istnieją) funkcji $f(x,y) = |x^2 + y^2 - 25| + 3x + 4y$ na zbiorze $W = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 10^2\right\}$. Wyznacz wszystkie punkty, w których te wartości są przyjmowane.