Analiza matematyczna A3. WypełNiańka do Listy 2.

1. Niech $f(x,y)=x^2-y+2$.

a) Oblicz: $f(2,3)=$ .... , $f(3,2)=$ .... , $f(x,0)=$ .... , $f(1,y)=$ .... , $f(2x+y,3x)=$ .... , $f(x,-x)=$ ....

b) Rozwiąż równania: $f(x,4)=0$, $f(4,y)=0$, $f(x,x)=0$, $f(y,y)=0$

c) Zaznacz w układzie współrzędnych następujące zbiory:

$P_0=\{(x,y): f(x,y)=0\}$,
$P_1=\{(x,y): f(x,y)=1\}$,
$P_2=\{(x,y): f(x,y)=2\}$,...

d) Następujące zbiory leżą na płaszczyznach. Narysuj je (płaszczyzny i zbiory).

$A=\{(x,y,z): z=f(x,y)\ \wedge\ y=1\}$, $B=\{(x,2,f(x,2)): x\in\mathbb{R}\}$,

$C=\{(2,y,z): z=f(2,y)\}$, $D=\{(x,y,z): z=f(x,y)\ \wedge\ y=x+1\}$,

$E=\{(x,y,f(x,y)): x=1\}$, $F=\{(x,x,z): z=f(x,x)\}$

2. KONIECZNIE powtórz zadanie 1. dla innych przykładów funkcji.

3. Niech $f,g:[0,3]\times[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2+y^2+1$ i $g(x,y)=f([x],[y])$.

a) Wykres funkcji g można zobrazować ustawiając klocki – jak? (Narysuj)

b) Jak wygląda wykres funkcji $g_2(x,y)=f([2x]/2,[2y]/2)$?

c) Jak wygląda wykres funkcji $g_{100}(x,y)=f([100x]/100,[100y]/100)$?

d) Jak wygląda wykres funkcji $h(x,y)=[f(x,y)]$?

e) Jak wygląda wykres funkcji $h_2(x,y)=[2f(x,y)]/2$?

4. (Takiego zadania nie będzie na kartkówce nr 2, ale będą podobne.)
Dla $s=1$, $s=2$, $s=4$ i f-cji $f(x,y)$ naszkicuj zbiory

a) $A_s=\{(x,y): f(x,y)=s\}$ gdy $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y}+y-2$

Mamy
$$\begin{aligned}&\frac{x^2}{y}+y-2=s\\ &x^2+y^2-2y=sy\\ &x^2+y^2-2(1+\tfrac12 s)y+(1+\tfrac12 s)^2=(1+\tfrac12 s)^2\\ &x^2+(y-(1+\tfrac12 s))^2=(1+\tfrac12 s)^2\end{aligned}$$

Zatem wydawać by się mogło, że zbiory A_s to okręgi o środkach w punktach $(0,1+\frac12 s)$ i promianiach $1+\frac12 s$. Takie okręgi są (parami) wewnętrznie styczne, więc mają punkt wspólny! A przecież różne poziomice powinny być rozłączne. Coś jest nie tak. Co?

b) $B_s=\{(x,y): f(x,y)=s\}$ gdy $f(x,y)=\left[x^2+(y-1)^2\right]$

Wprost z definicji symbolu [.], czyli części całkowitej mamy:
$$\begin{aligned}\left[x^2+(y-1)^2\right]=1 &\iff 1\le x^2+(y-1)^2<2\\ \left[x^2+(y-1)^2\right]=2 &\iff 2\le x^2+(y-1)^2<3\\ \left[x^2+(y-1)^2\right]=4 &\iff 4\le x^2+(y-1)^2<5\end{aligned}$$
Zatem zbiory B_1, B_2, B_4 są pierścieniami (bez zewnętrznych brzegów)...

c) $C_s=\{(x,z): f(x,s)=z\}$ gdy $f(x,y)=x\cdot\sin\left(y\cdot\frac{\pi}{4}\right)$

Dla $s=1$ mamy: $z=f(x,1)\iff z=x\cdot\sin\left(1\cdot\frac{\pi}{4}\right)\iff z=x\cdot\frac{\sqrt2}{2}$, czyli ....
Dla $s=2$ mamy: $z=f(x,2)\iff z=x\cdot\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)\iff z=x\cdot 1$, czyli ....
Dla $s=4$ mamy: $z=f(x,4)\iff z=x\cdot\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)\iff z=$ ...... , czyli ....

* * *

Przed Listą 3.

5. Niech $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ i niech $a_n=(x_n,y_n)$, gdzie $x_n=\frac{1}{2n+3}+\frac1n$ i $y_n=\frac{1}{2n+3}$.

Wtedy granicą ciągu a_n jest para $(0,0)$, a granicą ciągu $f(a_n)$ jest liczba ....

Podaj po trzy przykłady ciągów $b_n=(x_n,y_n)$ zbieżnych do $(0,0)$ takich, że:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=6$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=4$ **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=\pi+\sqrt2$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=-8$ **f)** $\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=+\infty$ **g)** $f(b_n)$ nie jest zbieżny

Powtórz dla funkcji $f(x,y)=y/x$. Powtórz dla funkcji $f(x,y)=y^3/x^2$.