

ANALIZA MATEMATYCZNA A3. LISTA 3.

1. Zbadaj istnienie następujących granic, oblicz wartość, jeśli granica istnieje

a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$ c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

e) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 4}} (x-3)(\ln y - \ln 4)$ f) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 4}} \frac{\ln y - \ln 4}{x-3}$ g) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 4}} \frac{e^{(x-3)^2 + (y-4)^2} - 1}{(x-3)^2 + (y-4)^2}$

h) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} e^{y-x^2}$ i) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0}} e^{y/x^2}$ j) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0}} e^{y^2/x}$ k) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ |y| \leq x^2}} \frac{xy}{x^4 + y^4}$

l) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} xy \ln(x^2 + y^2)$ ł) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$ m) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0+}} \frac{\sin x}{y}$ n) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0+}} x^\alpha y^\beta$

2. Zbadaj ciągłość (w których punktach funkcje są ciągłe, a w których nieciągłe?)

a) $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x + y)$ b) $f(x, y) = y \cdot \operatorname{sgn} x$ c) $f(x, y) = [x] + [y + 0, 1]$

d) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y^2 & \text{dla } x \geq y \\ x - y & \text{dla } x < y \end{cases}$ e) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy} - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ y & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

f) $f(x, y) = \begin{cases} |x| + |y| & \text{dla } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \alpha & \text{dla } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$ g) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & \text{dla } x \geq 0 \\ \alpha & \text{dla } x < 0 \end{cases}$

h) $f(x, y) = \begin{cases} |x| & \text{dla } y > x^2 \\ x & \text{dla } y = x^2 \\ y & \text{dla } y < x^2 \end{cases}$ i) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{dla } |x| + |y| \leq 1 \\ p & \text{dla } |x| + |y| > 1 \end{cases}$

j) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 & \text{dla } \max\{|x|, |y|\} \leq 1 \\ p & \text{dla } \max\{|x|, |y|\} > 1 \end{cases}$ k) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy} - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

3. Dla jakich wartości parametru p funkcja f jest ciągła (w każdym punkcie dziedziny)?

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ |p| & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ a') $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{|p|} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ |p| & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y^2)}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ |p| & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ b') $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{|p|} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ |p| & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(x^2 y^2)}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ |p| & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ c') $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg}(x^2 y^2)}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ |p| & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

TAKICH ZADAŃ NIE BĘDZIE NA KLASÓWCE NR 3, ALE MOGĄ BYĆ PODOBNE:

A. Podobne do zadania 1. a)–d). Uzasadnij odpowiedzi.

B. Niech $f(x, y) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x^2 + y^2 \leq 1 \\ -2 & \text{dla } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$. Podaj odpowiedzi:

- Czy f ma pochodną cząstkową lewostronną f'_x w punkcie $p_0 = (x_0, y_0)$?
- Czy f ma pochodną cząstkową prawostronną f'_x w punkcie $p_0 = (x_0, y_0)$?
- Czy f ma pochodną cząstkową lewostronną f'_y w punkcie $p_0 = (x_0, y_0)$?
- Czy f ma pochodną cząstkową prawostronną f'_y w punkcie $p_0 = (x_0, y_0)$?
- Czy f ma granicę w p_0 ?
- Czy f jest ciągła w p_0 ?

gdys: a) $p_0 = (1, 0)$ b) $p_0 = (0, 1)$ c) $p_0 = (\frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ d) $p_0 = (\frac{\sqrt{1}}{2}, 0)$

C. Niech $f(x, y) = \begin{cases} |x| & \text{dla } (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ y & \text{dla } (x, y) \notin [0, 1] \times [0, 1] \end{cases}$.

Podaj zbiór tych wszystkich punktów \mathbb{R}^2 , w których

a) nie istnieje f'_x b) nie istnieje f'_y c) f nie ma granicy d) f nie jest ciągła