ANALIZA MATEMATYCZNA A3. LISTA 4.

1. Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu; wskaż ich dziedziny.

a) $f(x,y)=x^7y^9+xe^{xy}$ **b)** $f(x,y)=\log(x^2+y^3)$ **c)** $z=|x|+[y]$

d) $f(x,y)=\frac{x^{10}y^{20}}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$ **e)** $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$, $f(0,0)=0$

f) $f(x,y)=\frac{e^{xy}-1}{x}$, $f(0,y)=y$ **g)** $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$

h) $f(x,y)=\frac{\sin(xy)}{x}$, $f(0,y)=y$ **i)** $f(x,y)=\begin{cases} |x| & \text{dla } x^2+y^2\le 1 \\ -2 & \text{dla } x^2+y^2>1 \end{cases}$.

2. Oblicz gradient funkcji **a)** $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ **z)** $f(x,y,z)=(x^2+y^2)^z$

3. Oblicz pochodną funkcji w kierunku podanego wektora

a) $f(x,y)=x^8y^4+e^{x^2y}$ w punkcie $(0,5)$ wzdłuż wektora $[-1,2]$

b) $f(x,y)=\sin^2(x^2y^2)$ w punkcie $(\pi,\frac{1}{\pi})$ wzdłuż wektora $[3,7]$

c) $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ w punkcie $(1,1)$ w kierunku wektora $[5,12]$

d) $f(x,y)=2xy+x^2y^2$, $[1,-1]$ **e)** $f(x,y)=x(x+y)^{20}$, $[5,12]$

f) $f(x,y)=x^{y+1}$ w punkcie $(2,2)$ wzdłuż wektora $(1,1)$

g) $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ w punkcie $(1,2)$ w kierunku wektora $(3,-4)$

h) $f(x,y)=\sin x+y^2x$, $(1,1)$ **i)** $f(x,y)=e^{xy}+x^8$, $(3,-4)$

4. W podanym punkcie znajdź równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni

a) $z=(2+x-y)^2,\ (3,-1,36)$ **b)** $z=4x^2+y^2,\ (2,1,17)$

c) $zy+z=x+2,\ (2,3,1)$ **d)** $xyz=1,\ (0.5,-2,-1)$

e) $\sin(xy)=2-z^2,\ (\pi,0.5,-1)$ **f)** $(x+y-1)(x+y+1)=2xy,\ (0.5\sqrt{3},0.5,2)$

5. Udowodnij, że płaszczyzny styczne do powierzchni $x^2+y^2+z^2=16$ i $z^2=x^2+y^2$ w punkcie $(2,2,2\sqrt{2})$ są prostopadłe.

6. Znajdź długość odcinka prostej $x=2, y=3$ zawartego między powierzchnią $z=x^2+y^2$ i płaszczyzną styczną do niej w punkcie $(1,1,2)$.

7. (żmudne) Znajdź płaszczyznę styczną do powierzchni $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ zawierającą punkty $(5,7,7),\ (3,4,5)$.

8. Oblicz wszystkie pochodne rzędu pierwszego 'jakie się da':

a) $z=2x^2-3y^3;\ x=\sqrt{t},\ y=e^{2t}$ **a')** $z=\operatorname{arctg}(y^2-x^2);\ x=\sin t,\ y=\cos t$

b) $z=2e^{x^2y};\ x=\sqrt{uv},\ y=1/u$ **b')** $z=\ln(x^2-y^2);\ x=u-v,\ y=u^2+v^2$

c) $z=\sin 2u\cos 3v;\ u=(r+s)^2,\ v=(r-s)^2$ **c')** $z=u^v;\ u=x^y,\ v=xy$

d) $z=ue^v+ve^{-u};\ u=\ln r,\ v=s\ln r$

e) $w=\sqrt{x^2+y^2+z^2};\ x=e^t,\ y=e^{-t},\ z=2t$

f) $w=\dfrac{yz}{x^2+xy};\ x=u^2,\ y=v^2,\ z=u^2-v^2$

g) $w=y\ln xz;\ x=ve^u,\ y=u^2v^4,\ z=ue^v$

h) $x^3+4x^2y+2y^3+5=3xy^2$ **h')** $x^2+y^2+\sin(xy^2)=3$

i) $x^2z^2-2xyz+z^3y^2=3$ **i')** $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{x+y+z}=\dfrac{1}{2}$

9. Udowodnij: **a)** jeśli $z=f(x-y)$, to $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\,?$

b) jeśli $w=f(x-y,y-z,z-x)$, to $\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=\,?$

c) jeśli $z=\dfrac{y}{y^2-a^2\cdot x^2}$, to $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$