

ANALIZA MATEMATYCZNA A3. LISTA 6.

1. Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji na danym zbiorze

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y$ na trójkącie o wierzchołkach $(0,0)$, $(-3,0)$, $(0,-3)$

b) $f(x, y) = 2xy$ na kole jednostkowym o środku w $(0,0)$

c) $f(x, y) = 2x^2 - 2y^2$ na kole o środku w $(0,0)$ i promieniu 2

d) $f(x, y) = 2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ na kole o środku w $(0,0)$ i promieniu 2

e) $f(x, y) = 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}y^2}$

2. Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji na danym zbiorze

a) $f(x, y) = x^6 + y^6 + xy$, $x, y \in [-1, 1]$ b) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4\arctg(xy)$, $[0, 10]^2$

c) $f(x, y) = \frac{1}{2+xy} + \frac{x}{8}$, $x, y \in [-1, 1]$ d) $f(x, y) = x^4 + y^4$, $x, y \in [0, 10]$, $x + 8y \geq 9$

e) $f(x, y) = (x - 1)^2 + \frac{16}{9}(y - 2)^2$, $x \in [0, 2]$, $0 \leq y \leq x^2$ f) $z = |x| + |y - 2|$, \mathbb{R}^2

g) $f(x, y) = [x + y - 3] + [y - 2]$, $[-5, 5]^2$ h) $f(x, y) = |x| + (x + y)^2 + \frac{3}{2}y$, $[-1, 1]^2$

i) $f(x, y) = |x - 3| + |y - 2|$, $x, y \in [-5, 5]$

j) $f(x, y) = [x + y - 3] + [y - 2]$, $x, y \in [-5, 5]$

3. Liczbę dodatnią przedstawić w postaci sumy trzech składników dodatnich tak, by ich iloczyn był największy.

4. Wyznacz punkt płaszczyzny $z = 0$, dla którego suma kwadratów odległości od punktów $A_1(1, 2, 1)$, $A_2(1, 3, 4)$, $A_3(-1, 2, 2)$, $A_4(0, 2, 3)$, $A_5(5, 1, 5)$ jest najmniejsza. (Uogólnij.) A jak to jest w kwadracie? A w trójkącie? A w czworościanie?

5. W daną kulę o średnicy $2r$ wpisać prostopadłościan o największej objętości.

6. Okna romańskie (zwieńczenie jest półokręgiem) mają obwód równy d (suma długości trzech odcinków i półokręgu). Wyznacz stosunek wysokości do szerokości takiego okna o największym prześwicie (czyli o największym polu powierzchni).

* * *

7. Wyznacz wartość najmniejszą i największą funkcji przy podanych warunkach posługując się metodą czynników nieoznaczonych Lagrange'a. W których przykładach można to zrobić prościej?

a) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2y - 3$ a') gdy $x^2 + y^2 = 4$ a'') gdy $x^2 + y^2 \leq 4$

b) $f(x, y) = x^3 + x^2 + y^2/3$ gdy $x^2 + y^2 \leq 36$

c) $f(x, y) = xy$ gdy $2x^2 + y^2 \leq 4$ d) $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ gdy $x - y = \pi/4$

e) $f(x, y) = 16 - x^2 - 4y^2$ gdy $x^4 + 2y^4 \leq 1$ f) $f(x, y) = xy$ gdy $x^2 + y^2 = 32$

g) $f(x, y) = 4x^2 + y^3 + 3y + 7$ gdy $2x^2 + \frac{3}{2}y^2 = \frac{3}{2}$

8. Wyznacz wartość najmniejszą i największą funkcji na podanym zbiorze.

a) $f(x, y, z) = 3z - x - 2y$ gdy $x^2 + 4y^2 - z = 0$

a') $f(x, y, z) = 3z - x - 2y$ gdy $x^2 + 4y^2 - z = 0$ i $x - y = 0$

b) $f(x, y, z) = y^3 + xz^2$ gdy $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

b') $f(x, y, z) = y^3 + xz^2$ gdy $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i $x - y = 0$

c) $f(x, y, z) = xyz$ gdy $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$

d) $f(x, y, z) = xyz$ gdy $x + y + z = 5$, $xy + xz + yz = 8$

9. Sprowadź poniższe zadania do zagadnienia szukania ekstremów funkcji przy zadanych warunkach. Podaj też inne sposoby rozwiązania.

a) Na płaszczyźnie $3x - 2z = 0$ znaleźć taki punkt, by suma kwadratów jego odległości od punktów $A(1, 1, 1)$ i $B(2, 3, 4)$ była najmniejsza.

b) Na powierzchni $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ znaleźć taki punkt S , by objętość ostrosłupa $SABC$ była b_1) najmniejsza, b_2) największa, gdzie $A(4, 0, 4)$, $B(4, 4, 4)$, $C(4, 4, 0)$.

c) Znaleźć prostopadłościan o danej objętości mający najmniejszą powierzchnię.

c') Znaleźć prostopadłościan o danej powierzchni mający największą objętość.

c'') Znaleźć prostopadłościan o danej łącznej długości krawędzi mający naj

d) Znaleźć prawidłowy ostrosłup trójkątny o danej , mający naj

e) Na elipsie dane są dwa punkty. Znaleźć na niej taki trzeci punkt, by trójkąt z nich utworzony miał największe pole.

e) Zoptymalizować wymiary: puszki, puszki bez wieczka.