

ANALIZA MATEMATYCZNA A3. LISTA 7.

1. Sprawdzić czy podane równanie określa jednoznacznie ciągłą funkcję uwikłaną $y = y(x)$ w pewnych otoczeniach podanych punktów.

- a) $x^y - y^x = 0$, $A = (2, 4)$; $B = (e, e)$; $C = (3, 3)$
 b) $x^4 + y^4 = 2x^2y^2$, $A = (0, 0)$; $B = (1, 1)$; $C = (-1, 1)$
 c) $x^2 + y^2 - 2xy = 0$, $A = (0, 0)$; $B = (1, 1)$; $C = (-1, -1)$; $D = (-1, 1)$
 d) $x^4 + y^4 - 2xy = 0$, $A = (0, 0)$; $B = (1, 1)$; $C = (-1, -1)$

1'. Sprawdzić czy podane równanie określa jednoznacznie ciągłą funkcję uwikłaną $z = z(x, y)$ w pewnych otoczeniach podanych punktów.

- a) $x^2z + yz^2 - 2 = 0$, $A = (1, 1, 1)$, $B = (\sqrt{2}, 0, 1)$

2. Wyznacz równania stycznych do krzywych w podanych punktach

- a) $x^3 - y^3 + x - y = 0$, $A = (2, 2)$; $B = (p, p)$
 b) $x^2 + y^2 = 3xy - x$, $A = (1, 1)$; $B = (0, 0)$
 c) $x^2 - 2x + y^2 - 2y = -1$, $A = (1, 2)$, $B = (0, 1)$

2'. Wyznacz równania płaszczyzn stycznych do powierzchni w podanych punktach

- a) $x^2 + y^3 + z^4 = x + z$, $A = (0, 0, 0)$; $B = (1, 0, 0)$; $C = (1, 0, 1)$

3. Oblicz pochodną dy/dx i drugą pochodną d^2y/dx^2 funkcji uwikłanych $y = y(x)$

- a) $xe^y - y + 1 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 3xy = 0$
 b) $1 + xy = \ln(e^{xy} + e^{-xy})$ c) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

3'. Oblicz pochodne cząstkowe rzędu drugiego funkcji uwikłanej $z = z(x, y)$

- a) $\cos(x + y + z) + x + y + z = 0$ b) $z^2 = xy$ c) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$

4. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej $y = y(x)$ zadanej równaniem:

- a) $x^2 + y^2 + 4y = xy + 2x$ b) $(x - y)^2 = y + xy - 3x$
 c) $x^5 + y^4 - 4xy^2 = 0$ d) $x^3 + y^3 = 12xy$

4'**. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej dwóch zmiennych zadanej równaniem:

- a) $x^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0$ b) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

5. Wiedząc, że istnieje znaleźć prostopadłość P , postaci $[a_d, a_g] \times [b_d, b_g] \times [c_d, c_g]$, o najmniejszej objętości, zawierający powierzchnię:

$$96x^2 + 84y^2 + 64z^2 = 44x + 88y + 132z + 16xy + 24xz + 48yz + 121$$

ROZGRZEWKI

0. (BEZRACHUNKOWE) Naszkicuj poszczególne zbiory zadane równaniami:

- a) $|y| - x^2 = 0$ b) $|y| - |x^2 - 1| = 0$ c) $|y| - |x^3| = 0$ d) $y^2 - x^2 = 0$

88) $\{(x, y) : (x - i)^2 + (y - j)^2 - 1 = 0 \wedge i, j \in \{-1, 1\}\}$

- Wyznacz możliwie najmniejszą liczbę funkcji ciągłych (zmiennej x), których suma wykresów jest danym zbiorem. Dla każdej z powyższych funkcji wskaż punkty szczególnie: bez pochodnej, z pochodną $= 0$, ekstrema,

- Jak wyżej, ale funkcje zmiennej y , t.j. postaci $x = x(y)$.

- Czy powyższe można zrobić na wiele sposobów? Na ile? Które punkty są osobliwe?

0'. Pomyśl o zbiorach w przestrzeni zadanych równaniami:

- a) $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ b) $x^4 + y^4 + z^4 - 1 = 0$ c) $|z| - (x^2 + y^2) = 0$

Każdy z nich przedstaw jako sumę wykresów pewnych funkcji postaci $z = z(x, y)$. Przeanalizuj własności tych funkcji jak w zad. 0.