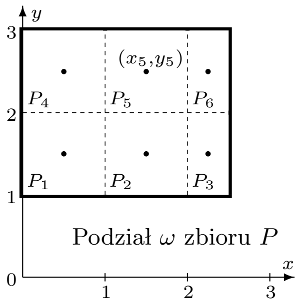
Analiza matematyczna A3. Lista 8. $\iiint$

Wypełniańka. Podział ω prostokąta $P=[0,\frac{5}{2}]\times[...,...]$ tworzy 6 zbiorów:
$P_1=[0,1]\times[1,2]$, $P_2=...\times...$, $P_3=...$, ...
o polach: $\Delta p_1=1$, $\Delta p_2=...$, $\Delta p_3=...$, ...
Wybrano w nich punkty: $(x_1,y_1)=(\frac{1}{2},\frac{...}{2})$, ...



Dla funkcji $f(x,y)=x+y$ i podziału z punktami, liczymy

$$\sigma_\omega:=\sum_{i=1}^{...} f(x_i,y_i)\cdot\Delta p_i := (\tfrac{1}{2}+\tfrac{...}{2})\cdot 1+ \ .... \ =...$$

$$s_\omega:=\sum_{i=1}^{...} \inf_{z\in P_i} f(z)\cdot\Delta p_i = (0+1)\cdot 1+ \ .... \ =...$$

$$S_\omega:=\sum_{i=1}^{...} \sup_{z\in P_i} f(z)\cdot\Delta p_i = (1+2)\cdot 1+ \ .... \ =...$$

1. Powtórz dla: **a)** $f(x,y)=[x]+[y]$ **b)** $f(x,y)=[x+y]$ **c)** $f(x,y)=[x]$

d) $f(x,y)=[y-x]$ **e)** $f(x,y)=x+\mathrm{sgn}\,(y-x)$ (gdzie $[.]$ – część całkowita)

2. Niech $m,n\in\mathbb{N}$.
Prowadząc (odpowiednie) proste równoległe do osi układu, można zbiór P podzielić na $m\cdot n$ jednakowych prostokątów P_i, $i=1,2,\dots mn$, o polach $\Delta p_i=...$.
Niech jak poprzednio (x_i,y_i) będzie środkiem prostokąta P_i.

a) Przyjmując $m=25$ i $n=20$ oraz $f(x,y)=[x]$ oblicz wielkości:

$$\sigma_\omega=\sum_{i=1}^{m\cdot n} f(x_i,y_i)\cdot\Delta p_i,\quad s_\omega=\sum_{i=1}^{m\cdot n}\inf_{z\in P_i} f(z)\cdot\Delta p_i,\quad S_\omega=\sum_{i=1}^{m\cdot n}\sup_{z\in P_i} f(z)\cdot\Delta p_i.$$

a') przyjmując $m=25\cdot 10^{m'}$ i $n=2\cdot 10^{n'}$ oblicz wielkości $\sigma_\omega,\ s_\omega,\ S_\omega$

a") oblicz granice ciągów $\sigma_\omega,\ s_\omega,\ S_\omega$ gdy $m',\ n'\to\infty$

b) powtórz a)–a") dla $f(x,y)=[x]+[y]$ **c)** powtórz a)–a") dla $f(x,y)=x+y$

3. Odgadnij $\iint\limits_P f\,d\omega$ i dobierz taki 'wygodny' podział ω, że $|S_\omega-s_\omega|<\dfrac{1}{10^6}$, gdzie:

a) $f(x,y)=[2x]+[y]$, $P=[0,\frac{1}{3}]^2$ **a')** $P=[0,\frac{1}{2}]^2$ **a")** $P=[0,4]^2$

b) $f(x,y)=|x|$, $P=[-1,1]^2$ **b')** $P=[-1,3]\times[-\pi,\sqrt{2}]$

c) $f(x,y)=[x-\sqrt{2}]+[y]$, $P=[\sqrt{2},5+\sqrt{2}]\times[2,7]$ **c')** $P=[2,4]^2$

d) $f(x,y)=[\frac{x}{\pi}]+[\frac{y}{\pi}]$, $P=[1,4]\times[2,8]$ **e)** $f(x,y)=[\frac{x}{\pi}+\frac{y}{\pi}]$, $P=[1,4]\times[2,8]$

4. Proste $y=\pm x+n/3$, $n\in\mathbb{Z}$, wyznaczają podział ω trójkąta P o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, w którym jest ... kwadratów o polach ... oraz ... trójkątów o polach ... . Dla funkcji $f(x,y)=(x+y)^2$ obliczyć wielkości s_ω i S_ω.

5. Które całki można obliczyć bez rachunku całkowego? **a)** $\iint\limits_{[0,1]^2} 2x+3y\,d\omega$

b) $\iint\limits_{[0,1]^2} e^{[x+y]}\,d\omega$ **c)** $\iint\limits_{[-1,1]^2} e^{[x+y]}\,d\omega$ **d)** $\iint\limits_{[0,1]^2} x^2y^3\,d\omega$ **e)** $\iint\limits_{[-1,1]^2} x^2y^3\,d\omega$

f) $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} x^2y^3\,d\omega$ **g)** $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{x^2+y^2}\,d\omega$ **h)** $\iint\limits_{[-1,1]^2} |x+y|\,d\omega$

6. Oblicz całki wielokrotne jak w przykładzie:

$$\int_0^6\int_0^1 xy+ye^x\,dxdy=\int_0^6\left(\int_0^1 xy+ye^x dx\right)dy=\int_0^6\left[\frac{1}{2}x^2y+ye^x\right]_0^1 dy=$$

$$=\int_0^6 y\left(e-\frac{1}{2}\right)dy=\left[\frac{1}{2}y^2\left(e-\frac{1}{2}\right)\right]_0^6=18\left(e-\frac{1}{2}\right)=18e-9$$

a) $\int_2^4\int_3^7 y\ln x\,dxdy$ **b)** $\int_4^6\int_1^2\int_2^3 x+2y+3z\,dxdydz$ **c)** $\int_0^1\int_1^2\int_2^3 xy+z\,dxdydz$

d) $\int_0^{2\pi}\int_1^e (\sin y)x^{1/x}\,dxdy$ **e)** $\int_1^2\int_1^2 \frac{1}{x+y}\,dxdy$ **f)** $\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} x\sin^2(xy)\,dxdy$

7. Dokonaj zmiany kolejności całkowania. Oblicz obydwie całki i porównaj wyniki

a) $\int_2^3\int_0^{\sqrt{y}} x^3dxdy$ **b)** $\int_1^2\int_1^y xydxdy$ **c)** $\int_{-1}^1\int_{|y|-1}^{1-|y|} x+y^2dxdy$ **d)** $\int_1^2\int_{2-x}^{x^2} 1dydx$

e) $\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt[3]{x}} 6x+ydydx$ **f)** $\int_{-2}^2\int_0^{4-x^2} y+2dydx$ **g)** $\int_0^2\int_0^{4-x^2} 3xdydx$

8. Oblicz całki (uwaga: trapez, trókąt oznacza <u>pełny</u> wielokąt)

a) $\iint\limits_K e^x\,d\omega$, K - (pełny) trapez o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$ i $(3,0)$

b) $\iint\limits_L xy\,d\omega$, L - trójkąt o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,1)$ i $(2,-1)$

c) $\iint\limits_M x^3\,d\omega$, $M=\{(x,y);4x^2+y^2\le 4\}$ **h)** $\iint\limits_R |x^2-y|\,d\omega$, $R=[0,1]\times[0,1]$

d) $\iiint\limits_N x^2+y\,d\omega$, $N=\{(x,y,z);x,y,z\in\mathbb{R}_+\cup\{0\},x+y+z\le 1\}$

e) $\iiint\limits_O 1\,d\omega$, $O=\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2\le 1,x\ge 0\}$

f) $\iint\limits_P x^2\,d\omega$, P - czworokąt krzywoliniowy o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,4)$, $(8,1)$ i $(-2,-2)$ ograniczony krzywymi: $y=x^2$ i $xy=8$ i dwoma odcinkami

g) $\iint\limits_Q \sqrt{y}\,d\omega$, Q - obszar ograniczony parabolą $y=x^2$ i prostą $y=x+6$

9. Znajdź środki ciężkości figur K,L,N,O,P,Q i $S=\{(x,y):x^2+y^2\le 1,x+y\le 1\}$