Analiza matematyczna A3. Lista 8'. $\iint$, $\iiint$

Poniższe ćwiczenia (miejscami żmudne) są analogiczne do zadań 6,7,8 listy 8.

6'. Oblicz całki wielokrotne

a) $\int_0^1\int_0^y x\sqrt{y^2-x^2}\,dx\,dy$ **b)** $\int_0^1\int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx$ **c)** $\int_0^1\int_1^5 \frac{1}{r}\,dr\,ds$

d) $\int_{-1}^1\int_0^2 x^{15}e^{x^2y^2}\,dy\,dx$ **e)** $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} x\,dx\,dy$ **f)** $\int_{\ln(\pi/6)}^{\ln(\pi/2)}\int_0^{e^y}\cos e^y\,dx\,dy$

g) $\int_{-1}^1\int_0^x\int_{x-y}^{x+y} z-2x-y\,dz\,dy\,dx$ **h)** $\int_{-13}^{13}\int_1^e\int_0^{x^{-0,5}} z(\ln x)^2\,dz\,dx\,dy$

7'. Dokonaj zmiany kolejności całkowania. Oblicz obydwie całki i porównaj wyniki

a) $\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy$ **b)** $\int_1^4\int_{\sqrt{y}}^2 \sin(\frac{x^3}{3}-x)\,dx\,dy$ **c)** $\int_1^e\int_0^{\ln x} y\,dy\,dx$

d) $\int_0^{\pi^{1/3}}\int_{y^2}^{\pi^{1/3}}\sin x^{3/2}\,dx\,dy$ **e)** $\int_1^e\int_{1/e}^{1/y}\cos(x-\ln x)\,dx\,dy$ **f)** $\int_0^x\int_x^y y\,dx\,dy$

g) $\int_0^1\int_0^{2-2x}\int_0^{3-3x-3y/2} x^2+yz\,dz\,dy\,dx$ **h)** $\int_0^1\int_0^2\int_0^{3-3x} x^2+yz\,dz\,dy\,dx$

8'. Oblicz całki (uwaga: trapez, trókąt oznacza pełny wielokąt)

a) $\iint_A 3x-5\,d\omega$, gdzie A jest ogr. liniami: $y=5+x,\ y+x=7,\ x=10$

b) $\iint_B xy\,d\omega$, gdzie B jest ogr. liniami: $y=x,\ y=x^2$

c) $\iint_C 4+x^2\,d\omega$, gdzie C jest ogr. liniami: $y=1+x^2,\ y=9-x^2$

d) $\iiint_R xy\,d\omega$, gdzie R jest częścią kuli o środku (0,0,0) i promieniu 2 zawartą w I oktancie

e) $\iiint_W z\,d\omega$, gdzie W jest ogr. pow.: $x^2+y^2+z^2=9,\ z=0,\ |x|=1,\ |y|=1$

f) $\iiint_V 3xy\,d\omega$, gdzie V jest ogr. pow.: $z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+z^2=1$

Poniższych zadań nie będzie (na najbliższej kartkówce), ale będą podobne.

1. Niech $P=[2,4]\times[1,2]$ i niech $f(x,y)=[x]$.
Podaj sumę dolną s_ω i sumę górną S_ω funkcji f na zbiorze P dla podziału ω, gdzie

a) ω oznacza podział P prostymi postaci $x=\frac{k}{1000}$, (gdzie $k\in\mathbb{Z}$)

$s_\omega=$ $S_\omega=$

b) ω oznacza podział P prostymi postaci $y=\frac{k}{1000}$, (gdzie $k\in\mathbb{Z}$)

$s_\omega=$ $S_\omega=$

c) ω oznacza podział P na $2\cdot10^6$ jednakowych kwadratów.

$s_\omega=$ $S_\omega=$

2. Niech P oznacza czworokąt o wierzchołkach: (0,0), (1,0), (2,1), (1,1) i niech $f(x,y)=3(x-y)$. Niech dla ustalonej liczby naturalnej n ω_n oznacza podział P prostymi postaci $y=\frac{k}{n}$ i $y=x-\frac{k}{n}$ (gdzie $k\in\mathbb{Z}$). Oblicz sumę dolną s_{ω_n} i sumę górną S_{ω_n} funkcji f na zbiorze P i oblicz granice $\lim_{n\to+\infty}s_{\omega_n}$ oraz $\lim_{n\to+\infty}S_{\omega_n}$.

3. Podaj wartości całek

a) $\iint_{[-3,3]^2} |y-x|\,d\omega=$

b) $\iint_{[-3,3]^2} y-x\,d\omega=$

c) $\iint_{[-3,3]^2} y^4-x^4\,d\omega=$

d) $\iint_{[-1,1]^2} [y]+[x]\,d\omega=$

e) $\iint_{[0,1]^2} 3y\,d\omega=$