Rozwiązania zadań jakich nie będzie na najbliższej kartkówce

indeks: 007   imię: KAROL nazwisko: OMYŁEK

1. Niech $P = [2,4] \times [1,2]$ i niech $f(x,y) = [x]$. Podaj sumę dolną s_ω i sumę górną S_ω funkcji f na zbiorze P dla podziału ω, gdzie

a) ω oznacza podział P prostymi postaci $x = \frac{k}{1000}$, (gdzie $k \in \mathbb{Z}$)

$s_\omega = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 5$ $S_\omega = s_\omega + 1 \cdot \frac{1}{1000} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{1000} \cdot 1 = 5 + \frac{2}{1000}$

b) ω oznacza podział P prostymi postaci $y = \frac{k}{1000}$, (gdzie $k \in \mathbb{Z}$)

$s_\omega = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ $S_\omega = 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$

c) ω oznacza podział P na $2 \cdot 10^6$ jednakowych kwadratów.

$s_\omega =$ jak w a) $S_\omega =$ jak w a)

2. Niech P oznacza czworokąt o wierzchołkach: (0,0), (1,0), (2,1), (1,1) i niech $f(x,y) = 3(x-y)$. Niech dla ustalonej liczby naturalnej n ω_n oznacza podział P prostymi postaci $y = \frac{k}{n}$ i $y = x - \frac{k}{n}$ (gdzie $k \in \mathbb{Z}$). Oblicz sumę dolną s_{ω_n} i sumę górną S_{ω_n} funkcji f na zbiorze P i oblicz granice $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{\omega_n}$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{\omega_n}$.

$$s_{\omega_n} \underset{\text{dlaczego?}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} 3\frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot 1 = 3\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k = 3\frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$$

$$S_{\omega_n} \underset{\text{dlaczego?}}{=} \sum_{k=1}^{n} 3\frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot 1 = 3\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = 3\frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n+1)n}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$$

3. Podaj wartości całek

a) $\displaystyle\iint\limits_{[-3,3]^2} |y-x|\, d\omega = |\text{ dwa ostrosłupy }| = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6) \cdot 6 = 72$

b) $\displaystyle\iint\limits_{[-3,3]^2} y - x\, d\omega = 0$, bo dwa ostrosłupy, jeden nad, drugi pod pł. $z = 0$

c) $\displaystyle\iint\limits_{[-3,3]^2} y^4 - x^4\, d\omega = \iint\limits_{[-3,3]^2} y^4\, d\omega - \iint\limits_{[-3,3]^2} x^4\, d\omega = \iint\limits_{[-3,3]^2} x^4\, d\omega - \iint\limits_{[-3,3]^2} x^4\, d\omega = 0$

d) $\displaystyle\iint\limits_{[-1,1]^2} [y] + [x]\, d\omega = (\text{na palcach}) = 0 \cdot 1^2 + (-1) \cdot 1^2 + (-1) \cdot 1^2 + (-2) \cdot 1^2 = -4$

e) $\displaystyle\iint\limits_{[0,1]^2} 3y\, d\omega = (\text{pół prostopadłościanu}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = \frac{3}{2}$