

ANALIZA MATEMATYCZNA A3. LISTA 9.

1. Wyraż całki we współrzędnych biegunowych i oblicz je w nowych współrzędnych.

a) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2 + y^2) dx dy$ b) $\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{y^2}{x^2+y^2} dy dx$ c) $\int_1^2 \int_0^x \pi dy dx$

d) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{3}} xy dy dx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy dy dx$ e) $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \frac{x}{x^2+y^2} dy dx$ f) $\iint_{[0,3]^2} x d\omega$

g) $\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} |x+y| dy dx$ h) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} (x^2+y^2) dy dx$ i) $\iint_{x^2+y^2 < 2y} x^2+y^2 d\omega$

2. Obliczyć objętość obszaru (a-f: ograniczonego powierzchniami):

a) $x+y+z=4, x=3, y=2, x=0, y=0, z=0$ b) $z=4, x^2+4y^2=z$
 c) $x^2+y^2+z^2=2z, x^2+y^2=z^2$ d) $2z=x^2+y^2, x+z=4$
 e) $z=4x+2y, x^2+y^2=1, z=0$ f) $x^2+y^2=4x, x^2+y^2=z^2, z=0$
 g) $\{(x,y,z) : z^2+4 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9\}$ h) $\{(x,y,z) : |x|+|y|+|z| \leq 9\}$

3. Oblicz masę płytki w kształcie tr. równob. o boku 2, jeżeli gęstość jest proporcj. do kwadratu odległości od p-ktu przecięcia środkowych i w wierzch. jest równa 1.

3D. Oblicz masę piramidy o wysokości 3 i podstawie 2×2 , jeżeli gęstość jest proporcj.

- a) do kwadratu odległości od wierzchołka i przy podstawie jest równa 7
- b) do sześciianu odległości od podstawy i w górnym wierzch. jest równa 1.
- c) do czwartej potęgi odległości od środka podstawy i w wierzch. jest równa 1

4. Wyraż całki we współrzędnych cylindrycznych i oblicz je.

a) $\iiint_D x^2+y^2 dV$ gdzie D jest wyznaczone przez pow. $x^2+y^2=1, z=0, z=4$
 b) $\iiint_D z dV$ gdzie D jest wyznaczone przez $x^2+y^2+z^2 \leq 1, x,y,z \geq 0$
 c) $\iiint_D y^2 dV$ gdzie D jest wyznaczone przez pow. $x^2+y^2+z^2=4, x^2+y^2=1$
 d) $\iiint_D yz dV$ gdzie D wyznaczają pow. $x^2+y^2+z^2=1, r=\cos\theta, y=0, z=0$

5. Wyznacz pole powierzchni a) bryły $V = \{(x,y,z) : 0 \leq z \leq 9-x^2-y^2\}$
 b) części paraboloidy $z=9-x^2-y^2$ leżącej nad płaszczyzną $z=5$
 c) części sfery $16=x^2+y^2+z^2$ leżącej w cylindrze $x^2-4x+y^2=0$
 d) części pow. $z=x^2$ leżącej nad trójkątem o wierzch. $(0,0,0), (1,0,0), (1,1,0)$.

6. Wyraż całki we współrzędnych sferycznych i oblicz je w nowych współrzędnych.

a) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{dz dy dx}{x^2+y^2+z^2}$ b) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} x^2+y^2+z^2 dz dy dx$

c) $\iiint_V \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dV$, gdzie V jest wyznaczone przez:
 $z = \sqrt{3x^2+3y^2}, x^2+y^2+z^2=9, x^2+y^2+z^2=81, z \geq 0$

d) $\iiint_V \sqrt{z} dV$, gdzie V wyznacza: $x^2+y^2+z^2=16, x=y, x=\sqrt{3y}, x,y,z \geq 0$

7j. Oblicz jakobiany, znajdź przekształcenia odwrotne i obrazy podanych zbiorów:

- a) $x = \frac{1}{2}(u+v), y = \frac{1}{2}(u-v); W = \{(u,v) : 1 \leq u \leq 2, -u \leq v \leq 4-u\}$
- b) $x = u, y = v\sqrt{u}; W = \{(u,v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \sqrt{u}\}$
- c) $x = 2u+3v, y = u-v; W = \{(u,v) : u^2+v^2 \leq 1\}$
- d) $x = u, y = v^2; W_1 = \{(u,v) : 1 \leq u \leq 2, 2 \leq v \leq 3\}, W_2 = [1,2] \times [3,4]$

8j. Wyraż całki w nowych podanych współrzędnych i oblicz je.

a) $\int_0^1 \int_0^{1-2\sqrt{x}+x} x+y+2\sqrt{xy} dy dx$ $\begin{cases} x = s \cdot \cos^4 t \\ y = s \cdot \sin^4 t \end{cases}$
 b) $\int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y)^{10} dy dx$ $\begin{cases} x = s \cos^2 t \\ y = s \sin^2 t \end{cases}$ c) $\int_2^3 \int_{\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} |x+y| dy dx$ $\begin{cases} x = r \\ r = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

9. Dla jakich dodatnich wartości parametru m całka niewłaściwa jest zbieżna?

a) $\iint_{\|(x,y)\| \geq 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^m}$ b) $\iint_{\|(x,y)\| \leq 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^m}$
 c) $\iiint_{\|(x,y,z)\| \geq 1} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^m}$ d) $\iiint_{\|(x,y,z)\| \leq 1} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^m}$

10. Wyznacz wartość całki niewłaściwej $\int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^2} dx$.