

ZAMIAST WYKŁADU

obrazki na: www.math.uni.wroc.pl/~komilParametryzacją linii (łuku, krzywej) $K \subset \mathbb{R}^n$ nazywamyfunkcję $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, o dziedzinie $[a, b] \subset \mathbb{R}$ taką, że $F[[a, b]] = K$.Np. $F : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(t) = (3 \cos |t|, 3 \sin |t|)$ jest parametryzacją półokręgu o środku $(0, 0)$ i promieniu 3. Tą parametryzację można notować inaczej: $x(t) = 3 \cos |t|$, $y(t) = 3 \sin |t|$, $t \in [-\pi, \pi]$ lub $x = 3 \cos |t|$, $y = 3 \sin |t|$, $-\pi \leq t \leq \pi$.Parametryzację linii K można interpretować jako opis ruchu punktu obiegającego całe K w czasie od a do b . W momencie t tego ruchu, prędkość $(x'(t), y'(t))$ jest wektorem stycznym do K w punkcie $(x(t), y(t))$, a szybkość jest długością tego wektora (o ile istnieją pochodne $x'(t), y'(t)$). Długość linii K tylko w niektórych parametryzacjach jest równa drodze, jaką przebywa punkt ją opisujący.

* * *

1. Funkcja $F : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $F(t) = (t^2 + 1, 3t^2 + 4)$ przekształca punkty przedziału na punkty płaszczyzny; np.: $F(-1) = (2, \dots)$, $F(-0.5) = \dots$.a) Czy p-kt'y $(3.25, 10.75)$, $(1.09, 4.27)$, $(2.69, 9.07)$ należą do zbioru wartości F ?

b) Zbiorem wartości tej funkcji jest odcinek – jaki?

UWAGA. Mówimy też: $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = 3t^2 + 4$, $-1 \leq t \leq 2$ jest jedną z możliwych *parametryzacji* tego odcinka, inną jest: $x = t^2 + 1$, $y = 3t^2 + 4$, $0 \leq t \leq 2$.

Powtórz b) dla:

c) $G(t) = (|t| + 1, 3|t| + 4)$, $|t| \leq 4$, $H(t) = (|t|, 3|t| + 1)$, $t \in [1, 5]$ d) $x = \sin t + 1$, $y = 2 \sin t + 3$, $-4\pi \leq t \leq 2\pi$ e) $x = 2 - 3t$, $y = -4t$, $0 \leq t \leq 12$ f) $x = e^t$, $y = e^{4+t} + 3$, $0 \leq t \leq \log 5$

2. Zaznacz łuki opisane parametrycznie: (wyznacz zbiory wartości funkcji):

a) $x = \cos(2\pi t) + 1$, $y = \cos(2\pi t) + 3$, $t \in [-2, 1]$.b) $x = 3 \cos(2\pi t) + 1$, $y = 3 \cos(2\pi t) + 3$, $t \in [-2, 1]$.c) $x = 3 \cos(2\pi t) + 1$, $y = 3 \sin(2\pi t) + 3$, $t \in [-2, 1]$.d) $x = 2 \cos(2\pi t) + 1$, $y = 3 \sin^2(2\pi t) + 3$, $t \in [-2, 1]$.e) $x = 2 \cos(2\pi t) + 1$, $y = 3 \cos^2(2\pi t) + 3$, $t \in [-2, 1]$.f) $x = 2 \cos(2\pi t) + 1$, $y = 3 \sin^2(2\pi t) + 3$, $t \in [-2, 1]$.g) $x = t$, $y = -\sqrt{4 - t^2}$, $t \in [-2, 2]$.h) $x = -\sqrt{4 - t^2}$, $y = 4 - t^2$, $t \in [-2, 2]$.i) $x = \min\{t, 1 - t\}$, $y = \max\{t, 1 - t\}$, $t \in [-1, 1]$.j) $x = 2t$, $y = 3t$, $z = 4t$, $t \in [1, 2]$.k) $x = 2t + 3$, $y = 3t + 4$, $z = 4t + 5$, $t \in [-1, 3]$.l) $x = 2t^2 + 3$, $y = 3t^2 + 4$, $z = 4t^2 + 5$, $t \in [0, 2]$.m) $x = 2t^2 + 3$, $y = 3t^2 + 4$, $z = 4t^2 + 5$, $t \in [-1, 2]$.3. a) Czy jadące pojazdy A i B :

$$x_A = t + 1, y_A = 4t + 3, t \in \mathbb{R}_+, x_B = t - 5, y_B = 2t + 1, t \in \mathbb{R}_+$$

kiedyś zderzą się? Jeśli tak, to kiedy? Jeśli nie, to jak blisko miną się?

b) Podaj takie parametryzacje przy $t \in [0, 1]$ odcinków: $(0, 0)(1, 5)$ i $(0, 2)(9, 0)$, które opisują ruch punktów które się 'zderzą' w punkcie przecięcia tych odcinków.

4. Podaj opis jakiejś wędrowki:

a) po łamanej $\{(x, y) : y = |x| \wedge x \in [-2, 2]\}$ b) po łamanej $\{(x, y) : y = ||x - 1| - 2| \wedge x \in [-5, 5]\}$ c) po brzegu kwadratu o wierzchołkach: $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$

d) po brzegu jakiegoś trójkąta e) po ósemce

5. Wzór $M(t) = (5 \cos(\pi/2 - 2\pi t), 5 \sin(\pi/2 - 2\pi t))$, $t \in [0, 24]$ opisuje położenie końca minutowej wskazówki (o długości ...) zegarka jako funkcję czasu.

a) Opisz ruch końca małej wskazówki o długości 3

b) Opisz długość odcinka łączącego końce wskazówek (jako funkcję czasu).

c*) Jak zmienić powyższe, gdy zegar późni się (jednostajnie) 5 minut na dobę?

6. Zbiór wartości funkcji $F : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(t) = (\cos t, \sin t, t)$ nazywany jest *linią śrubową*. Opisz gwint śruby o średnicy 12mm i skoku 2mm.

* * *

ZADANIA DODATKOWE

7. W których z opisanych ruchów szybkość jest stała, czyli $||v(t)|| = \text{const}$?

8. Opisz ruch po okręgu, w którym największa szybkość osiągnięta jest 'na dole'.

Na rysunku obok widać ... pana Jo — Chińczyka, który jedzie na rowerze i na bagażniku wiezie drąg PQ długości $2d = 2$.9*. Zakładamy, że Jo jedzie po wykresie f-cji $f(x) = e^x$, ściśle mówiąc: środek bagażnika przesuwają się idealnie nad wykresem.

a) Wyznacz równania linii, które wykreślają końce drąga.

b) Powtórz a), gdy $d = 2$ oraz gdy $d = 0,3$.c) Czy te linie są wykresami funkcji (z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$)?10**. Powtórz zad. 9. dla $f(x) = \sin x$ oraz dla $f(x) = x^2$.