

1. Jak wyglądają wykresy funkcji: $f(x, y) = x^2$, $g(x, y) = x^2 - y$, $h(x, y) = x^3 - x$?

2. Podaj przykłady funkcji $f(x, y)$ takich, że dla każdej pary (x, y) :

a) $f(x, y) = f(y, x)$ b) $f(x, y) = f(-x, -y)$ c) $f(x, y) = f(x, -y)$

d) $f(x, y) = f(4-x, y)$ e) $f(x, y) = f(4-x, 6-y)$ f) $f(x, y) = f(|x|, |y|)$

Jak sens geometryczny mają powyższe warunki?

3. Podaj przykłady funkcji $f(x, y)$ takich, że dla wykresu f :

a) $(0, 0, 0)$ jest środkiem symetrii a') $(1, 2, 3)$ jest środkiem symetrii

b') $y = \pi$ jest płaszczyzną symetrii b'') $y = x$ jest płaszczyzną symetrii

c) prosta przechodząca przez $(-2, -4, 0)$ i $(-2, -4, 1)$ jest osią symetrii

4. Opisz (i naskicuj) obszar będący dziedziną funkcji dwóch zmiennych

a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2/9 - y^2/16}$ b) $f(x, y) = \ln(y^2 - 4x + 8)$

c) $f(x, y) = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$ d) $f(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ e) $f(x, y) = \ln(xy)$

f) $f(x, y) = \arcsin \frac{x^2+y^2}{4}$ g) $f(x, y) = \sqrt{x \sin y}$ h) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$

i) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{x+2}$ j) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y} + \sqrt{x^2 + y}$

k) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$ l) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ m) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 9)$

5. Niech $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Niektóre z poniższych napisów nie mają sensu – które?

$f(g(x, y), y)$, $f(g(x, y), g(x, y))$, $f(g(x), g(y))$, $g(f(g(x, y), x), x)$, $g(f(x+1, y) + x)$.

6. Narysuj poziomicę (i/lub inne cięcia) wykresu funkcji tak, by odkryć jego kształt.

a) $z = x^2 + y^2$ c) $z = x^2 + y^2 + 2xy$ e) $f(x, y) = xy$ f) $f(x, y) = x^2 - y^2$

g) $f(x, y) = x + y$ h) $f(x, y) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ i) $f(x, y) = |x| + |2y|$

j) $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + 9y^2}$ k) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x$ l) $f(x, y) = 2x + [y]$

m) $f(x, y) = y^2 - |x|$ n) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ o) $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y$

p) $f(x, y) = \sin x + \sin y$ r) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ s) $f(x, y) = 2y - \cos x$

t) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ u) $f(x, y) = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ v) $f(x, y) = [x] \cdot [y]$

7. Dobierz odpowiednią funkcję (i jej dziedzinę) tak, by jej wykres wyglądał jak:

a) dach (dwuspadzisty) b) dach hali fabrycznej c) dach hangaru

d) pół pow. piłki do rugby e) węgłom f) namiot igloo g) wulkan

* * *

c0. Podaj 5 wyrazów ciągu: a) $a_n = (3 - 1/2^n, 1/n^2)$ b) $b_k = (k, 1/k)$

c1. WYPEŁNIAŃKA. Udowodnimy, że granicą ciągu $a_n = (\frac{1}{\dots\dots\dots}, \frac{n-1}{\dots\dots\dots})$ punktów płaszczyzny $(\mathbb{R}^2)$ jest punkt $g = (\dots, \dots)$. Zauważmy, że dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$\begin{aligned} \|a_n - (0, 1)\| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2n+3} - \dots\right)^2 + \left(\frac{n-1}{n} - \dots\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{(2n+3)^2} + \frac{1}{n^2}} = \\ &= \frac{1}{n(2n+3)} \sqrt{5n^2 + 12n + 9} \leq \frac{1}{n(2n+3)} \sqrt{26n^2} = \frac{\dots\dots\dots}{2n+3}. \end{aligned}$$

Stąd dla dowolnego $\varepsilon > 0$ dla każdego naturalnego $n \geq \dots\dots\dots$ mamy $\|a_n - g\| < \varepsilon$ □

c2. Odgadnij granicę g ciągu a_n i udowodnij wprost z definicji, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, gdy

a) $a_n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{n-2}{n^2-4}\right)$ b) $a_n = \left(\frac{\sin(n\pi/6)}{n}, \frac{1}{n+3}\right)$ c) $a_n = \left(\frac{\sin n}{n^2}, \frac{\cos n}{n^3}\right)$

c3. Udowodnij wprost z definicji, że $(1, 0)$ nie jest granicą ciągu $a_n = (n \sin \frac{1}{n}, \sin(\frac{n\pi}{3}))$.

c4. Podaj przykłady ciągów $a_n = (a'_n, a''_n)$ zbieżnych do $(0, 0)$ i takich, że:

a) $0 < a'_n < n \cdot a''_n$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a'_n}{a''_n} = 17$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a'_n}{a''_n} = -\infty$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a''_n}{a'_n} = \infty$

* * *