

ANALIZA MATEMATYCZNA A3. WYPEŁNIAŃKA DO LISTY 2.

1. Niech $f(x, y) = x^2 - y + 2$.

a) Oblicz: $f(2, 3) = \dots\dots\dots$, $f(3, 2) = \dots\dots\dots$, $f(x, 0) = \dots\dots\dots$,
 $f(1, y) = \dots\dots\dots$, $f(2x + y, 3x) = \dots\dots\dots$, $f(x, -x) = \dots\dots\dots$

b) Rozwiąż równania: $f(x, 4) = 0$, $f(4, y) = 0$, $f(x, x) = 0$, $f(y, y) = 0$

c) Zaznacz w układzie współrzędnych następujące zbiory:

$$P_0 = \{(x, y) : f(x, y) = 0\},$$

$$P_1 = \{(x, y) : f(x, y) = 1\},$$

$$P_2 = \{(x, y) : f(x, y) = 2\}, \dots$$

d) Następujące zbiory leżą na płaszczyznach. Narysuj je (płaszczyzny i zbiory).

$$A = \{(x, y, z) : z = f(x, y) \wedge y = 1\}, B = \{(x, 2, f(x, 2)) : x \in \mathbb{R}\},$$

$$C = \{(2, y, z) : z = f(2, y)\}, D = \{(x, y, z) : z = f(x, y) \wedge y = x + 1\},$$

$$E = \{(x, y, f(x, y)) : x = 1\}, F = \{(x, x, z) : z = f(x, x)\}$$

2. KONIECZNIE powtórz zadanie 1. dla innych przykładów funkcji.

3. Niech $f, g : [0, 3] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ i $g(x, y) = f([x], [y])$.

a) Wykres funkcji g można zobrazować ustawiając klocki – jak? (Narysuj)

b) Jak wygląda wykres funkcji $g_2(x, y) = f([2x]/2, [2y]/2)$?

c) Jak wygląda wykres funkcji $g_{100}(x, y) = f([100x]/100, [100y]/100)$?

d) Jak wygląda wykres funkcji $h(x, y) = [f(x, y)]$?

e) Jak wygląda wykres funkcji $h_2(x, y) = [2f(x, y)]/2$?

4. (Takiego zadania nie będzie na kartkówce nr 1, ale będą podobne.)

Dla $s = 1$, $s = 2$, $s = 4$ i f-cji $f(x, y)$ naszkicuj zbiory

$$\text{a)} \quad A_s = \{(x, y) : f(x, y) = s\} \quad \text{gd}y \quad f(x, y) = \frac{x^2}{y} + y - 2$$

ROWIĄZANIE?

$$\text{Mamy} \quad \frac{x^2}{y} + y - 2 = s$$

$$x^2 + y^2 - 2y = sy$$

$$x^2 + y^2 - 2(1 + \frac{1}{2}s)y + (1 + \frac{1}{2}s)^2 = (1 + \frac{1}{2}s)^2$$

$$x^2 + (y - (1 + \frac{1}{2}s))^2 = (1 + \frac{1}{2}s)^2$$

Zatem wydawać by się mogło, że zbiory A_s to okręgi o środkach w punktach $(0, 1 + \frac{1}{2}s)$ i promieniach $1 + \frac{1}{2}s$. Takie okręgi są (parami) wewnątrznie styczne, więc mają punkt wspólny! A przecież różne poziomicie powinny być rozłączne. Coś jest nie tak. Co?

$$\text{b)} \quad B_s = \{(x, y) : f(x, y) = s\} \quad \text{gd}y \quad f(x, y) = [x^2 + (y - 1)^2]$$

SZKIC ROWIĄZANIA

Wprost z definicji symbolu $[.]$, czyli części całkowitej mamy:

$$\begin{aligned} [x^2 + (y - 1)^2] = 1 &\iff 1 \leq x^2 + (y - 1)^2 < 2 \\ [x^2 + (y - 1)^2] = 2 &\iff 2 \leq x^2 + (y - 1)^2 < 3 \\ [x^2 + (y - 1)^2] = 4 &\iff 4 \leq x^2 + (y - 1)^2 < 5 \end{aligned}$$

Zatem zbiory B_1 , B_2 , B_4 są pierścieniami (bez zewnętrznych brzegów)...

$$\text{c)} \quad C_s = \{(x, z) : f(x, s) = z\} \quad \text{gd}y \quad f(x, y) = x \cdot \sin(y \cdot \frac{\pi}{4})$$

SZKIC ROWIĄZANIA

Dla $s = 1$ mamy: $z = f(x, 1) \iff z = x \cdot \sin(1 \cdot \frac{\pi}{4}) \iff z = x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, czyli

Dla $s = 2$ mamy: $z = f(x, 2) \iff z = x \cdot \sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) \iff z = x \cdot 1$, czyli

Dla $s = 4$ mamy: $z = f(x, 4) \iff z = x \cdot \sin(4 \cdot \frac{\pi}{4}) \iff z = \dots\dots\dots$, czyli

* * *

5. Niech $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$ i niech $a_n = (x_n, y_n)$, gdzie $x_n = \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{n}$ i $y_n = \frac{1}{2n+3}$.

Wtedy granicą ciągu a_n jest para $(\dots, \dots)$, a granicą ciągu $f(a_n)$ jest liczba $\dots\dots\dots$.

Podaj przykłady ciągów $b_n = (x_n, y_n)$ zbieżnych do $(0, 0)$ takich, że:

$$\text{a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = 6 \quad \text{b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = 4 \quad \text{c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \pi + \sqrt{2}$$

$$\text{e)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = -8 \quad \text{f)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = +\infty \quad \text{g)} \quad f(b_n) \text{ nie jest zbieżny}$$

Powtórz dla funkcji $f(x, y) = y/x$.

Powtórz dla funkcji $f(x, y) = y^3/x^2$.