

1. Zbadaj istnienie następujących granic, oblicz wartość, jeśli granica istnieje

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2}{x^2 + y^2} & \text{b)} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2} & \text{c)} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{d)} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{xy}{x^2 + y^2} \\
 \text{e)} \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 4}} (x-3)(\ln y - \ln 4) & \text{f)} \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 4}} \frac{\ln y - \ln 4}{x-3} & \text{g)} \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 4}} \frac{e^{(x-3)^2 + (y-4)^2} - 1}{(x-3)^2 + (y-4)^2} \\
 \text{h)} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} e^{y-x^2} & \text{i)} \lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0}} e^{y/x^2} & \text{j)} \lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0 \\ |y| \leq x^2}} e^{y^2/x} & \text{k)} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ |y| \leq x^2}} \frac{xy}{x^4 + y^4} \\
 \text{l)} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} xy \ln(x^2 + y^2) & \text{ł)} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{m)} \lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0+}} \frac{\sin x}{y} & \text{n)} \lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0+}} x^\alpha y^\beta
 \end{array}$$

2. Zbadaj ciągłość (w których punktach funkcje są ciągłe, a w których nieciągłe?)

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} f(x, y) = \operatorname{sgn}(x + y) & \text{b)} f(x, y) = y \cdot \operatorname{sgn} x & \text{c)} f(x, y) = [x] + [y + 0, 1] \\
 \text{d)} } f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y^2 & \text{dla } x \geq y \\ x - y & \text{dla } x < y \end{cases} & \text{e)} } f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy} - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ y & \text{dla } x = 0 \end{cases} \\
 \text{f)} } f(x, y) = \begin{cases} |x| + |y| & \text{dla } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \alpha & \text{dla } x^2 + y^2 > 1 \end{cases} & \text{g)} } f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & \text{dla } x \geq 0 \\ \alpha & \text{dla } x < 0 \end{cases} \\
 \text{h)} } f(x, y) = \begin{cases} |x| & \text{dla } y > x^2 \\ x & \text{dla } y = x^2 \\ y & \text{dla } y < x^2 \end{cases} & \text{i)} } f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{dla } |x| + |y| \leq 1 \\ p & \text{dla } |x| + |y| > 1 \end{cases} \\
 \text{j)} } f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 & \text{dla } \max\{|x|, |y|\} \leq 1 \\ p & \text{dla } \max\{|x|, |y|\} > 1 \end{cases} & \text{k)} } f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy} - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

3. Dla jakich wartości parametru p funkcja f jest ciągła (w każdym punkcie dziedziny)?

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ |p| & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & \text{a')} f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{|p|} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ |p| & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
 \text{b)} f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y^2)}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ |p| & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & \text{b')} f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{|p|} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ |p| & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
 \text{c)} f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(x^2 y^2)}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ |p| & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & \text{c')} f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg}(x^2 y^2)}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ |p| & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}
 \end{array}$$

TAKICH ZADAŃ NIE BĘDZIE NA KLASÓWCE NR 2, ALE MOGĄ BYĆ PODOBNE:

A. Niech $a_n = (\frac{1 + \sin n^4}{2n + (-1)^n}, \frac{2 + n^3}{n^3 + 2})$. Uzasadnij wprost z definicji, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots$.

B. Podobne do zadania 1. a)–d). Uzasadnij odpowiedzi.

C. Niech $f(x, y) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x^2 + y^2 \leq 1 \\ -2 & \text{dla } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$. Podaj odpowiedzi:

– Czy f ma granicę w p_0 ?

– Czy f jest ciągła w p_0 ?

gdys: **a)** $p_0 = (1, 0)$ **b)** $p_0 = (0, 1)$ **c)** $p_0 = (\frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ **d)** $p_0 = (\frac{\sqrt{1}}{2}, 0)$

D. Niech $f(x, y) = \begin{cases} |x| & \text{dla } (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ y & \text{dla } (x, y) \notin [0, 1] \times [0, 1] \end{cases}$.

Podaj zbiór tych wszystkich punktów $\mathbb{R}^2$, w których

a) f nie ma granicy **b)** f nie jest ciągła