

1. Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu; wskaż ich dziedziny.

a) $f(x, y) = x^7 y^9 + x e^{xy}$ **b)** $f(x, y) = \log(x^2 + y^3)$ **c)** $z = |x| + [y]$

d) $f(x, y) = \frac{x^{10} y^{20}}{x^2 + y^2}$, $f(0, 0) = 0$ **e)** $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$, $f(0, 0) = 0$

f) $f(x, y) = \frac{e^{xy} - 1}{x}$, $f(0, y) = y$ **g)** $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $f(0, 0) = 0$

h) $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x}$, $f(0, y) = y$ **i)** $f(x, y) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x^2 + y^2 \leq 1 \\ -2 & \text{dla } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$.

2. Oblicz gradient funkcji **a)** $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ **z)** $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)^z$

3. Dla zadanej funkcji f podaj zbiór tych wszystkich punktów dziedziny, w których:

a) nie istnieje f'_x **b)** nie istnieje f'_y **c)** f nie ma granicy **d)** f nie jest ciągła,

gdzie **A)** $f(x, y) = \begin{cases} |x| & \text{dla } (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ y & \text{dla } (x, y) \notin [0, 1] \times [0, 1] \end{cases}$ **B)** $f(x, y) = \begin{cases} 3x & \text{dla } x^2 \leq y \\ y & \text{dla } x^2 > y \end{cases}$

4. Niech $f(x, y) = \begin{cases} ax + by + c & \text{dla } x^2 + y^2 < 1 \\ x^2 + y^2 & \text{dla } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$. Dla jakich wartości a, b, c

a) f ma pochodną cząstkową f'_x w punkcie $p_0 = (1, 0)$ **b)** istnieje $f'_y(1, 0)$

c) $f'_x(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$ **d)** istnieje $f'_x(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ **e)** $f'_x(0, 0) + f'_y(0, 0) = 1$

5. Oblicz pochodną funkcji w kierunku podanego wektora

a) $f(x, y) = x^8 y^4 + e^{x^2 y}$ w punkcie $(0, 5)$ wzdłuż wektora $[-1, 2]$

b) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ w punkcie $(1, 1)$ w kierunku wektora $[5, 12]$

c) $f(x, y) = 2xy + x^2 y^2$, $[1, -1]$ **d)** $f(x, y) = x(x + y)^{20}$, $[5, 12]$

e) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ w punkcie $(1, 2)$ w kierunku wektora $(3, -4)$

f) $f(x, y) = \sin x + y^2 x$, $(1, 1)$ **g)** $f(x, y) = e^{xy} + x^8$, $(3, -4)$

6. W podanym punkcie znajdź równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni

a) $z = (2 + x - y)^2$, $(3, -1, 36)$ **b)** $z = 4x^2 + y^2$, $(2, 1, 17)$

c) $zy + z = x + 2$, $(2, 3, 1)$ **d)** $xyz = 1$, $(0.5, -2, -1)$

e) $\sin(xy) = 2 - z^2$, $(\pi, 0.5, -1)$ **f)** $(x + y - 1)(x + y + 1) = 2xy$, $(0.5\sqrt{3}, 0.5, 2)$

7. Udowodnij, że płaszczyzny styczne do powierzchni $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ i $z^2 = x^2 + y^2$ w punkcie $(2, 2, 2\sqrt{2})$ są prostopadłe.

8. Znajdź długość odcinka prostej $x = 2, y = 3$ zawartego między powierzchnią $z = x^2 + y^2$ i płaszczyzną styczną do niej w punkcie $(1, 1, 2)$.

9. (żmudne) Znajdź płaszczyznę zawierającą p-nty $(5, 0, 0), (0, 8, 0)$, styczną do powierzchni

a) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ **b)** $z = 4 - x^2 - y^2$ **c)** $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ **d)** $z = x^2$