

Lista zadań nr 10 z matematyki dla chemików

Całka

1. Obliczyć całki nieoznaczone następujących funkcji:

$$\frac{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2}{x - \sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}, \quad \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)}, \quad \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x}.$$

2. Obliczyć całki nieoznaczone następujących funkcji:

$$\frac{x^2}{x^3 + 1}, \quad \frac{x^4}{\sqrt{4 + x^5}}, \quad \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4 + 1}}, \quad \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{1 + \tan x}}, \quad xe^{x^2}, \quad \frac{e^x}{3 + 4e^x}.$$

3. Korzystając z metody całkowania przez podstawienie obliczyć całki nieoznaczone następujących funkcji:

$$\frac{x^2}{5 - x^6}, \quad \frac{2x}{x^4 + 3}, \quad \frac{1}{e^x + e^{-x}}, \quad \frac{1}{e^x + 1}, \quad e^{\sqrt{x}},$$

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad \frac{\operatorname{ctan} x}{\ln(\sin x)}, \quad x\sqrt{a^2 - x^2}, \quad x^{-2}e^{1/x}, \quad \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + a}}, \quad \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x}, \quad \frac{1}{x \ln x}, \quad \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}.$$

4. Całkując przez części znaleźć całki następujących funkcji:

$$xe^{-x}, \quad \ln^2 x, \quad \sin(\ln x), \quad x3^x, \quad \ln(1 + x^2), \quad x^2 \ln(1 + x), \quad x^2 \ln x,$$

$$\frac{\ln \cos x}{\cos^2 x}, \quad \frac{x}{\sin^2 x}, \quad \arctan \sqrt{x}, \quad x \arctan x, \quad \arcsin x, \quad (\arcsin x)^2,$$

$$x \cos x, \quad e^x \sin x, \quad xe^x \cos x, \quad x^2 e^x \sin x.$$

5. Obliczyć całki nieoznaczone następujących funkcji:

$$\frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x}, \quad \frac{2}{\sin^2 x + 3 \cos^2 x}, \quad \frac{1}{1 - \cos x}, \quad \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}, \quad \sin 5x \cos 8x, \quad \sin 2x \sin 6x.$$

6. Obliczyć całki oznaczone:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x dx, \quad \int_{-15}^{-3} \frac{8}{x} dx, \quad \int_2^3 \frac{dx}{4x^2 - 9}, \quad \int_0^{1/2} x \arctan 2x dx,$$

$$\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx,$$

7. Obliczyć pola następujących figur:

- (a) figury ograniczonej krzywą o równaniu: $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, prostymi $x = 1$, $x = 4$ i osią $0x$;
- (b) figury ograniczonej krzywą o równaniu: $y = 4x - x^2$, prostymi $x = 0$, $x = 4$ i osią $0x$;
- (c) figury ograniczonej wykresami funkcji: $y = e^x$, $y = e^{-x}$, i prostą $x = 1$;
- (d) trapezu o podstawie $[a, b]$, $a \geq 1$, ograniczonego z góry przez krzywą $y = \ln x$
- (e) figury zawartej między parabolą $y = -x^2 + 4x - 3$ i stycznymi do niej w punktach $(0, -3)$ i $(3, 0)$.

8. Znaleźć długości łuków następujących krzywych: $y = \ln \sin x$, $x \in [\pi/2, 2\pi/2]$, $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $x \in [0, 1]$, $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \leq x \leq 1/2$, $y = \ln \cos x$, $0 \leq x \leq \pi/4$.