

Lista zadań z matematyki nr 3 dla chemików

Funkcje elementarne

1. Wyznaczyć funkcję liniową $f(x) = ax + b$, jeśli $f(0) = -2$, $f(3) = 3$.
2. Wyznaczyć funkcję kwadratową $f(x) = ax^2 + bx + c$, jeśli $f(-2) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = 5$.
3. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$. Pokazać, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy:

$$f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) = 0.$$

4. Rozłożyć na iloczyn wielomianów nierozkładalnych wielomiany:
a) $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$, b) $x^3 - x^2 - x + 10$.
5. Wyznaczyć funkcję postaci $f(x) = a + bc^x$, jeśli $f(0) = 15$, $f(2) = 30$, $f(4) = 90$.
6. Rozwiąż równania: a) $3^{5x-8} = 9^{x-3}$; b) $25^{(x^2)} = 125^{4x-6}$; c) $(\frac{3}{7})^{3x-7} = (\frac{7}{3})^{7x-2}$
7. Rozwiąż nierówność: $2^{x+4} + 2^{x+5} + 5 \cdot 2^{x+2} < 34$.
8. Rozwiąż nierówność: $3^{3x+1} - 4 \cdot 27^{x-1} + 9^{\frac{3}{2}x-1} < 80$.
9. Pokaż, że wykresy funkcji f i g zadanych, odpowiednio, wzorami

$$f(x) = 3\frac{1}{2} \left(\frac{2}{7}\right)^{x+1} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \left(\frac{8}{343}\right)^{\frac{1}{3}x-1}$$

nie mają punktów wspólnych.

10. Dla jakich argumentów funkcja f zadana wzorem $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-5}$ przyjmuje wartości większe niż funkcja g zadana wzorem $g(x) = \left(\frac{9}{4}\right)^{5x+1}$.
11. Wyznacz wartość parametru k , jeżeli wiadomo, że dla argumentu $x = 1$ funkcje f i g zadane, odpowiednio, wzorami

$$f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x+k} + 2$$

przyjmują tę samą wartość.

12. Dla jakiego argumentu funkcja wykładnicza f określona wzorem $f(x) = 3^x$ przyjmuje wartość 6?
13. Wykresy funkcji f i g określonych, odpowiednio, wzorami

$$f(x) = 2^{x-1} - 3, \quad \text{oraz} \quad g(x) = \log_3(x+3) + k$$

mają z osią OY ten sam punkt wspólny A . Oblicz k i podaj współrzędne punktu A .

14. Funkcje f i g zadane, odpowiednio, wzorami

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+3} - 1, \quad \text{oraz} \quad g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(19+x) + p$$

mają to samo miejsce zerowe. Oblicz wspólne miejsce zerowe obu funkcji oraz wartość parametru p .

15. Obliczyć: a) $2^{\log_2 \sqrt{2}^{15}}$, b) $\log_{3\sqrt{3}} 27$, c) $-\log_8 \log_4 \log_2 16$.
16. Wiedząc, że $\log 2 = m$, oblicz: a) $\log 16$; b) $\log 5$; c) $\log 125$.
17. Oblicz:
a) $\log_6 16$ wiedząc, że $\log_{12} 2 = m$;
b) $\log_{35} 28$ wiedząc, że $\log_{14} 7 = a$ oraz $\log_{14} 5 = b$;
c) $\log_6 5$ wiedząc, że $\log_2 3 = c$ oraz $\log_5 2 = d$.

18. Oblicz:

a) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \dots \cdot \log_{14} 15 \cdot \log_{15} 16$; b) $\log_3 5 \cdot \log_{25} 81$; c) $\log_{\sqrt[3]{2}} 5 \cdot \log_{125} 8$.

19. Rozwiązać równania: a) $\log_2 x = 4$, b) $\log_2(x - 2) = 2$, c) $\log_{1/6}(x - 1) + \log_{1/6}(5x + 3) = -2$.

20. Rozwiąż równania:

a) $\log_2(x - 2) + \log_2(12 + x) - 3 = \log_2 3 + \log_2 5$;

b) $\log_3(x^2 + 4x + 1) = 1$;

c) $\log_4 x + \log_4(20 - x) - 1 = \log_4 9$.

21. Rozwiąż nierówności:

a) $\log_3(x - 3) > 2$;

b) $\log_{1/2}(3x - 2) \geq -1$;

c) $\log_3(2x - 7) \leq 2 - \log_3(8 - x)$.

Zadania dodatkowe

1. Wiedząc, że $\log 25 = k$, oblicz: a) $\log_2 10$; b) $\log_2 0,01$; c) $\log_2 0,4$; d) $\log_2 6,25$; e) $\log_2 \sqrt{40}$.

2. Oblicz:

a) $\log_{\sqrt[3]{5}} 2 \cdot \log_{\sqrt[3]{2}} 5$ b) $\log_{\sqrt[3]{3}} 4 \cdot \log_{64} 27$.

3. Rozwiąż równania:

a) $\log_x 2 - 4 \log_2 x = 3$

b). $\log(x + 3) - \log 0,5 = 2 \log(x - 2)$;

c) $x - \log 5 = x \log 5 + 2 \log 2 - \log(1 + 2^x)$;

d) $\log_5(\log_4(\log_2 x)) = 0$;

e) $2(\log_{1/2} x)^2 - 9 \log_{1/2} x + 4 = 0$;

f) $2 \log(x - 2) - \log(3x - 6) = \log 4$;

g) $\log 4 \log_2 \log_3(2x - 1) = \frac{1}{2}$;

h) $\log_4(1 + \log_3(1 + \log_2(x + 3))) = \frac{1}{2}$;

j) $x^{1+\log x} = 100x^2$;

k) $\log_{1/2} \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} = 0$.

4. Rozwiąż nierówności:

a) $\log_{1/3}(4x - 1) > -2 - \log_{1/3}(2x - 3)$;

b) $\log_2 \left(\frac{4x+6}{x} \right) > 0$;

c) $\log^2 x + 3 \log x > 4$;

d) $\log_{x-3}(x - 1) < 2$.