

Lista zadań nr 6 z matematyki dla chemików

Ciągi liczbowe

1. Podać ogólny wzór wyrazów następujących ciągów (arytmetycznych lub geometrycznych) oraz ich definicję rekurencyjną:

$$a) 2, 5, 8, 11, \dots \quad b) 1, 4, 16, 64, \dots \quad c) 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \dots$$

2. Podaj pierwsze 5 wyrazów ciągów określonych następująco:

$$a) a_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n \quad b) a_n = n^{-(n+1)} \quad c) a_1 = 0, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{3}, \quad d) a_1 = 2, a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$$

3. Zbadać monotoniczność i ograniczoność następujących ciągów:

$$(-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \quad n^{((-1)^n)}, \quad \frac{\cos \pi n}{n}, \quad \frac{n^2}{n^2 - 1}, \quad \frac{n+2}{3n^2 - 4}.$$

4. Obliczyć granice następujących ciągów:

$$3n^3 - 5n^2 + 7, \quad -5n^2 + n + 1, \quad 5^n - 3^n + 5, \quad 7 \cdot 3^n - 2^{2n} + 9; \quad \sqrt{n^2 - n + 3}.$$

5. Oblicz granice następujących ciągów:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad n - \sqrt{n^2 + 5n}, \quad \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}, \quad \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}, \\ \sqrt[3]{n+3} - \sqrt[3]{n+1}, \quad \sqrt[3]{n^3 + 4n^2} - n,$$

6. Oblicz granice następujących ciągów:

$$\frac{n^2}{n^2 - 1}; \quad \frac{n+2}{3n^2 - 4}, \quad \frac{2n^3 - 4n - 1}{6n + 3n^2 - n^3}, \quad \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} + 2}, \quad \frac{\sqrt{n^2 + 4}}{3n - 2}, \quad \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}, \quad \frac{4^{n-1} - 5}{2^{2n} - 7}, \quad \frac{n2^{2n} - 1}{n2^n + 1}, \\ \frac{1 - n!}{1 + n!}, \quad \frac{2n^3 - 4n^2 - 1}{4n^2 - n}, \quad \frac{n^5 - 7n^4 + 1}{5^n - 4 \cdot 3^n + 7}, \quad \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}, \quad \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n^2 + n}}{\sqrt{n+5} - \sqrt{n}}, \quad \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}{\sqrt{3n^3 - 1} - \sqrt{3n^3}}.$$

7. Oblicz granice następujących ciągów:

$$(-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \frac{\sin n}{n}, \quad \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n}{n+1}$$

8. Oblicz granice następujących ciągów:

$$\left(\frac{2n^2}{n^2 + 1}\right)^{\frac{n+1}{3n}}, \quad \left(\frac{n^3 + n}{5n^3 + 1}\right)^{\frac{n^2+1}{4n^2+13}}, \quad \left(\frac{2n}{3n^2 + 4}\right)^{\frac{n^3+1}{3n^3-5}}, \quad \left(\frac{4n^2 + n - 3}{5n^3 + n^2 - 4n + 6}\right)^{\frac{n^2+1}{5n^2-2}}, \\ (n^3 + 2)^{2^n - 1}, \quad (3^n - 2^n + 7)^{n^2 - 3n}.$$

9. Obliczyć granice następujących ciągów:

$$\sqrt[n]{1 + n + n^3}, \quad \sqrt[n]{n^2 - 3n + 2}, \quad \sqrt[n]{1 + 3^n + 7^n}, \quad \sqrt[n]{2^n + e^n}, \\ \sqrt[n]{10^n - 9^n + 8^n}, \quad \sqrt[n]{5^n - 3^n}, \quad \sqrt[n]{\frac{3^n + 2^n}{5^n + 3^n}}, \quad \sqrt[n]{\frac{7^n - 3^n}{4^n - 2^n}}.$$

10. Oblicz granice następujących ciągów:

$$\left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + 1}\right)^{n^2 + 2}, \quad \left(\frac{n^2 + 1}{n^2}\right)^{n^2 - 1}, \quad \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{5-2n}, \quad \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{5n}$$

Zadania dodatkowe

Oblicz granice następujących ciągów:

$$\frac{-7n^5 + 5n^4 - 4n^2 + 1}{-n^5 + 3}, \quad \frac{2n^4 - 4n^2 - 1}{4n + 2n^2 - n^3}, \quad \frac{2n^2 + n + 2}{n\sqrt{n}}, \quad \frac{n^2 - 1}{3n^2 + 2}, \quad \left(\frac{n^2 + 3}{n^2 + 4}\right)^n.$$