Lista zadań nr 7 z matematyki dla chemików

Szeregi liczbowe

1. Napisać pięć pierwszych wyrazów szeregu (wyraz ogólny tych szeregów jest numerowany od indeksu 1):

$$\sum_n \frac{1}{2n-1}, \quad \sum_n \frac{2n-5}{n^2+3}.$$

2. Obliczyć sumy częściowe podanych niżej szeregów i znaleźć ich granice:

$$\sum_n \frac{3}{5^n}, \quad \sum_n \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \quad \sum_n 5\left(-\frac{2}{7}\right)^{n-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

3. Korzystając z warunku koniecznego zbieżności szeregu (gdy szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$), wykazać, że następujące szeregi są rozbieżne:

$$\sum_n \frac{n-3}{4n-5}, \quad \sum_n \sqrt[n]{n}, \quad \sum_n \frac{4n^2+n+1}{n^2+n}, \quad \sum_n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

4. Zbadać zbieżność następujących szeregów stosując kryterium asymptotyczne zbieżności szeregów:

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^3-2n^2+100}, \quad \sum_n \frac{n+2}{2n^3-1}, \quad \sum_n \frac{1}{2n-1}, \quad \sum_n \frac{1}{n^2\ln^2 n}, \quad \sum_n \frac{1}{n^{7/3}-3n^{5/6}+50}.$$

5. Stosując kryterium d'Alemberta bądź Cauchy'ego zbadać zbieżność następujących szeregów:

$$\sum_n \frac{n!}{100^n}, \quad \sum_n \frac{n^{10}}{10^n}, \quad \sum_n \frac{2^n n!}{n^n}, \quad \sum_n \frac{3^n n!}{n^n}, \quad \sum_n \frac{n^n}{(2n)!}, \quad \sum_n \frac{1}{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

6. Zbadać zbieżność bezwzględną następujących szeregów:

$$\sum_n \frac{\sin(3^n)}{3^n}, \quad \sum_n \frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}.$$

7. Posługując się kryterium Leibniza o zbieżności szeregów naprzemiennych zbadać zbieżność następujących szeregów:

$$\sum_n (-1)^{n+1}(\sqrt[n]{2}-1), \quad \sum_n (-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}, \quad \sum_n (-1)^{n+1}\frac{1}{n2^n}.$$

Zadania dodatkowe

1. Napisać pięć pierwszych wyrazów szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3^n}.$$

2. Obliczyć pięć pierwszych sum częściowych szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-2n}{n+3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{2}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.$$

3. Napisać sumy częściowe podanych niżej szeregów i znaleźć ich granice:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-7}{(\sqrt{2})^{3n+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

4. Mając daną sumę częściową szeregu S_n, znaleźć ogólny wyraz szeregu oraz jego sumę:

$$S_n = \frac{n+1}{n}, \quad S_n = \frac{-1+2^n}{2^n}, \quad S_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

5. Korzystając z warunku koniecznego zbieżności szeregu, wykazać, że następujący szereg jest rozbieżny: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}$.

6. Zbadać zbieżność następujących szeregów stosując kryterium asymptotyczne zbieżności szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}, \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-3n+2},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}}{n^2+n+1}.$$

7. Posługując się kryterium d'Alemberta bądź Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!(n-1)!3^n}{(2n)!}.$$

8. Zbadać zbieżność bezwzględną następujących szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^\alpha}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{3^n}.$$

9. Posługując się kryterium Leibniza o zbieżności szeregów naprzemiennych zbadać zbieżność następujących szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(\sqrt[n]{3}-1), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$$