Wartości funkcji trygonometrycznych

I ćwiartka

Miara łukowa Miara stopniowa	0 0	$\pi/6$ 30	$\pi/4$ 45	$\pi/3$ 60	$\pi/2$ 90
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangens	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-$
kotangens	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

II ćwiartka

Miara łukowa Miara stopniowa	$\pi/2$ 90	$2\pi/3$ 120	$3\pi/4$ 135	$5\pi/6$ 150	π 180
sinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cosinus	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tangens	$-$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
kotangens	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-$

III ćwiartka

Miara łukowa Miara stopniowa	π 180	$7\pi/6$ 210	$5\pi/4$ 225	$4\pi/3$ 240	$3\pi/2$ 270
sinus	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
cosinus	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
tangens	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-$
kotangens	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

IV ćwiartka

Miara łukowa Miara stopniowa	$3\pi/2$ 270	$5\pi/3$ 300	$7\pi/4$ 315	$11\pi/6$ 330	2π 360
sinus	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cosinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tangens	$-$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
kotangens	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-$

Wzory redukcyjne

ϕ	$\pi/2-\alpha$	$\pi/2+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$3/2\pi-\alpha$	$3/2\pi+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\phi$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\phi$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\phi$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\phi$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Tożsamości trygonometryczne

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \quad \text{Jedynka trygonometryczna}$$

Funkcje sumy kątów

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad \text{sinus sumy}$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad \text{cosinus sumy}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \text{tangens sumy}$$

Pierwsze dwa wzory są prawdziwe dla wszelkich α i β. Wzór na tangens sumy jest prawdziwy dla wszystkich α i β, oprócz tych, dla których $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ lub $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ jest nieokreślony.

Funkcje różnicy kątów

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad \text{sinus różnicy}$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad \text{cosinus różnicy}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \text{tangens różnicy}$$

Pierwsze dwa wzory są prawdziwe dla wszelkich α i β. Wzór na tangens sumy jest prawdziwy dla wszystkich α i β, oprócz tych, dla których $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ lub $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ jest nieokreślony.

Funkcje kąta podwójnego

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \text{sinus kąta podwójnego}$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1 \qquad \text{cosinus kąta podwójnego}$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \text{tangens kąta podwójnego}$$

Pierwsze dwa wzory są prawdziwe dla wszelkich α. Wzór na tangens kąta podwójnego jest prawdziwy dla wszystkich α, oprócz tych, dla których $\operatorname{tg}\alpha$ lub $\operatorname{tg}2\alpha$ jest nieokreślony.

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

Pierwsze dwa wzory są prawdziwe dla wszelkich α. Wzór na tangens kąta podwójnego jest prawdziwy dla wszystkich α, oprócz tych, dla których $\operatorname{tg}\alpha$ lub $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ jest nieokreślony.

Funkcje połowy kąta

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$ sinus połowy kąta

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$ cosinus połowy kąta

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$ tangens połowy kąta

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$$ tangens połowy kąta

We wzorach tych występuje znak $\pm$, gdyż oba znaki są możliwe i wybrać należy znak $+$ lub $-$ zależnie od tego, w której ćwiartce leży kąt $\frac{\alpha}{2}$.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$ tangens połowy kąta.

Suma i różnica funkcji trygonometrycznych

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$ suma sinusów

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$ suma cosinusów

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$ suma tangensów

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$ różnica sinusów

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$ różnica cosinusów

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$ różnica tangensów