

## Zagadnienia z arytmetyki, algebry i analizy na forum Zestaw nr 1

- Trzej kolarze jadą po torze w kształcie okręgu. Pierwszy przebywa pełne okrążenie w ciągu 6 min, drugi w ciągu 8 min, a trzeci w ciągu 9 minut. Kolarze wystartowali jednocześnie o godzinie 12.00. Podaj godzinę pierwszego spotkania na linii startu. Odpowiedź uzasadnij.
- Czy liczbę 1000 można przedstawić jako sumę:
  - sześciu kolejnych liczb naturalnych.
  - szesnastu kolejnych liczb naturalnych
  - innej parzystej liczby liczb naturalnych.
- Czy istnieją liczby całkowite  $k, n, m$  takie, że  $k^2 + n^2 + m = 3$ ?
- Wykaż, że jeżeli pomiędzy każde dwie kolejne cyfry liczby 121 wpisujemy tę samą liczbę zer, to otrzymamy kwadrat pewnej liczby naturalnej.
- Wykaż, że jeżeli pomiędzy każde dwie kolejne cyfry liczby 484 wpisujemy tę samą liczbę zer, to otrzymamy kwadrat pewnej liczby naturalnej.
- Osoba A pomyślała pewną liczbę czterocyfrową o niepowtarzających się cyfrach, zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, ..., 8 bez 0 i 9. Osoba B zgaduje tę cyfrę cztery razy uzyskując odpowiedzi w postaci sumy punktów za każdą cyfrę według następujących zasad:  
1 pkt – jeśli cyfra stoi na swoim miejscu,  
0,5 pkt – jeśli cyfra nie stoi na swoim miejscu, ale występuje,  
0 pkt – jeśli cyfra nie występuje w pomyślanej liczbie.
  - Oto odpowiedzi, które uzyskała osoba B zgadując nieznaną liczbę  $a$ :  
(i) 4231 – 1 pkt, (ii) 2156 – 0,5 pkt, (iii) 5328 – 1,5 pkt, (iv) 8641 – 2,5 pkt.  
Jaką liczbę pomyślała osoba A? Odpowiedź uzasadnij.
  - Oto odpowiedzi, które uzyskała osoba B zgadując nieznaną liczbę  $b$ :  
(i) 5768 – 1 pkt, (ii) 7843 – 0,5 pkt, (iii) 4671 – 1,5 pkt, (iv) 1357 – 2,5 pkt.  
Jaką liczbę pomyślała osoba A? Odpowiedź uzasadnij.
- Wykaż, że jeżeli pomiędzy cyfrą jedności i cyfrą dziesiątek wpisujemy cyfry tworzące liczbę  $3(3n+1)$ , to otrzymamy liczbę podzielną przez 45 dla dowolnej liczby naturalnej  $n$ .
- Z motorówki płynącej pod prąd rzeki wypadła piłka. W chwili, gdy prowadzący motorówkę zauważył brak piłki, natychmiast zawrócił i dogonił piłkę po 30 minutach. Ile minut upłynęło od chwili wypadnięcia piłki?
- Wykaż, że różnica sześciątów dwóch kolejnych liczb naturalnych przy dzieleniu przez 6 daje resztą 1.
- Obecnie liczba lat ojca jest o 5 większa od sumy lat jego trzech synów. Po dziesięciu latach ojciec będzie dwa razy starszy od najstarszego syna, po dwudziestu latach będzie dwa razy starszy od średniego syna, a po trzydziestu latach będzie dwa razy starszy od najmłodszego syna. Ile lat obecnie ma ojciec i każdy z jego synów?
- Odkryj zaszyfrowane cyfry w poniższych działaniach, wiedząc, że we wszystkich działaniach te same litery oznaczają te same cyfry, a różnym cyfrom odpowiadają różne litery:  $BA + EC = DFC$ ,  $BC - EF = ED$ ,  $IJ - GH = FB$ .
- Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.
- Przy dzieleniu liczb naturalnych  $k, n, m$  przez 5 reszty są równe odpowiednio 1, 2, 3. Znajdź resztę z dzielenia sumy kwadratów tych liczb przez 5. Odpowiedź uzasadnij.
- Wykaż, że jeśli spośród liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 wybrać dowolnie sześć, to wśród nich znajdują się na pewno co najmniej dwie takie, których suma jest równa 10.



15. Wykaż, że liczba  $1^{2006} + 2^{2007} + 3^{2008}$  jest podzielna przez 6.
16. Nie rozwiązując równania  $3x^2 = y^2 + z^2$  wykaż, że jeśli liczby naturalne  $x, y, z$  spełniają to równanie, to każda z nich jest podzielna przez 3.
17. Kolejka toczy się po torach w kształcie okręgu. Rozstaw kół jest równy 4 cm. Podczas jednego okrążenia lewe kółko wagonu wykonało o 2 obroty więcej niż prawe. Jaka jest średnica kółka wagonu?
18. Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych, które można otrzymać nie używając cyfry 0.
19. Wykaż, że jeśli  $n$  jest liczbą naturalną nieparzystą, to  $n^6 - n^4 - n^2 + 1$  dzieli się przez 32.
20. Ile razy w ciągu 12 godzin, od godziny 12.00 w dzień do godziny 12.00 w nocy wskazówki chodzącego zegara tworzą kąt prosty.
21. Wykaż, że spośród każdych siedmiu różnych liczb naturalnych można wybrać dwie takie liczby  $n$  i  $m$ , że liczba  $n^2 - m^2$  jest podzielna przez 10.
22. Znajdź wszystkie pary liczb naturalnych  $(n, m)$  spełniających równanie  $n^4 - m^4 = 65$ .
23. Wykaż, że istnieją liczby naturalne  $n$  oraz  $m$  takie, że  $10m = n^4 + 3$ .
24. Rozważamy zegar którego duża minutowa wskazówka porusza się normalnie, a mała godzinowa porusza się z prawidłową prędkością, ale przeciwną niż powinna stronę. Zegar został uruchomiony o godzinie 12.00 i chodził przez 12 godzin. Ile razy w tym czasie wskazówki zegara były tak ustawione, jakby były ustawione wskazówki normalnego zegara.
25. Liczby  $a, b, c, d, e, f$  są to liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ale ustawione w innej przypadkowej kolejności. Wykaż, że liczba  $(a-1)(b-2)(c-3)(d-4)(e-5)(f-6)(g-7)$  jest parzysta.
26. Udowodnij, że suma trzech kolejnych dowolnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3.
27. Dla jakich liczb naturalnych  $n$ ,
  - a) liczba  $n^3 - n^2 + 5$  dzieli się przez  $n - 1$ ;
  - b) liczba  $n^3 - 2n^2 + 3$  dzieli się przez  $n - 2$ .
28. Wykaż, że każda nieparzysta liczba naturalna większa od jeden jest różnicą kwadratów dwóch liczb naturalnych.
29. Czy istnieje trójkąt prostokątny, którego długości boków są liczbami naturalnymi, z których każda daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1.
30. W turnieju startowało 100 zawodników. Każdy zawodnik miał rozegrać z każdym jedną partię. Każda partia kończyła się zwycięstwem jednego z zawodników. Turniej przerwano po rozegraniu 32 rund, czyli każdy zawodnik rozegrał 32 partie. Wykaż, że można znaleźć 4 zawodników, którzy uzyskali tę samą liczbę punktów.
31. Pan A i B spacerują po alejce długości 400 metrów. Każdy z panów zawraca po dojściu do końca alejki. Pan A chodzi z prędkością 40 m/min, a pan B z prędkością 80 m/min. Pewnego dnia wyruszyli na spacer o tej samej porze z dwóch przeciwległych końców alejki. Ile razy się spotkali w ciągu 1 godziny spaceru.
32. Znaleźć liczbę naturalną  $n$ , która jest sumą dwóch liczb naturalnych takich, że pierwsza jest większa od drugiej 24 i 62,5% pierwszej jest równa 75% drugiej.
33. Do ponumerowania stron książki zużyto 2091 cyfr. Ile stron liczy ta książka.
34. Iloczyn lat trojga dzieci jest równy 90. Najstarsze z nich jest o cztery lata starsze od średniego. Ile lat ma każde z nich, jeżeli liczby ich lat są liczbami naturalnymi.
35. Ile jest liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach, w których liczba utworzona z cyfry setek jest podzielna przez 3.
36. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną dzielącą się przez 2, 3, 4, 5, 6 z resztą 1 oraz przez 7 z resztą 0. Czy istnieje największa liczba o tej własności?

