

# Zbiór zadań ze wstępu do matematyki

Jan Kraszewski

Wrocław 2009

# Spis treści

Przedmowa	i
1 Zadania	1
2 Wskazówki do zadań	14
3 Odpowiedzi do zadań	21
Bibliografia	41

# Przedmowa

W zbiorach zadań ze wstępu do matematyki zadania zazwyczaj są tak pogrupowane, by dotyczyły pojęć z poszczególnych działów, omawianych w ramach tego przedmiotu (takich jak „Funkcje”, „Relacje” czy „Moce zbiorów”). Jest to uzasadnione, gdyż studenci poznają kolejne pojęcia sukcesywnie i nieuprawnionym byłoby oczekiwanie, że będą w stanie rozwiązywać zadania, dotyczące całego materiału. Z takimi spotykają się na ogół dopiero na egzaminie.

Przygotowując ten zbiór zadań chciałem odejść od opisanej powyżej zasady. Zebrane w nim zadania wymagają całościowej wiedzy ze wstępu do matematyki. Ważne jest też, by materiał ten był nie tylko opanowany, ale także dobrze zrozumiany. Wiele z tych zadań, choć wygląda skomplikowanie, ma w rzeczywistości krótkie rozwiązania, a główna ich trudność polega na tym, że występujące w nich obiekty mają dość skomplikowaną naturę i wymagają właśnie dobrego zrozumienia. Z tych też powodów zbiór dobrze nadaje się do przygotowań przedegzaminacyjnych.

Do wszystkich zadań opracowane są zarówno wskazówki, jak i odpowiedzi. Dzięki temu osoby, które preferują samodzielne rozwiązywanie zadań, a nie mają pomysłu, jak zacząć, mogą najpierw skorzystać ze wskazówki.

Wszystkie definicje pojęć i oznaczenia są zgodne z podręcznikiem [2]. W rozwiązaniach nie dowodzę faktów, które zostały udowodnione w tym podręczniku.

Autor prosi o zgłaszanie mu wszelkich uwag, dotyczących niniejszego zbioru, w szczególności przeoczonych pomyłek i błędów, pod adresem [Jan.Kraszewski@math.uni.wroc.pl](mailto:Jan.Kraszewski@math.uni.wroc.pl) .

Niniejszy skrypt został przygotowany i sfinansowany w ramach projektu Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego „Zamawianie kształcenia na kierunkach technicznych, matematycznych i przyrodniczych - pilotaż”, współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

*Jan Kraszewski*

# Rozdział 1

## Zadania

1. Niech  $A, B, C$  będą dowolnymi niepustymi podzbiórmi zbioru  $\mathbb{R}$ , a  $D$  – dowolnym podzbiorem zbioru  $\mathbb{R}$ .

- (a) Wyjaśnić słowami (bez użycia symboli), jaką własność zbioru  $D$  opisuje zdanie

$$(\forall x \in D)(\exists y \in D) x \neq y.$$

- (b) Zapisać symbolicznie wyrażenie

Rodzina zbiorów  $\{A, B, C\}$  jest rodziną rozłączną.

- (c) Czy warunek  $(A \setminus B) \cup C = C$  jest warunkiem koniecznym do tego, by  $A \subseteq C$ ? Odpowiedź uzasadnić.
- (d) Czy jeśli  $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$ , to może zajść  $B \times C \subseteq C \times A$ ? Odpowiedź uzasadnić.
- (e) Podać jak najslabszy warunek na moce zbiorów  $A$  i  $B$ , wystarczający do tego, by  $A \setminus B \sim \mathbb{R}$ . Odpowiedź uzasadnić.

2. Niech  $A, B, C$  będą dowolnymi, różnymi podzbiórmi zbioru  $\mathbb{R}$ .

- (a) Zapisać symbolicznie następujące wyrażenia. W podpunkcie (ii) nie wolno użyć kwantyfikatorów.
- (i) Każdy podzbiór zbioru  $A$  zawiera się w zbiorze  $B$  lub jest rozłączny z pewnym niepustym podzbiorem zbioru  $C$ .
- (ii) Rodzina  $\{A, B, C\}$  jest antyłańcuchem w zbiorze częściowo uporządkowanym  $\langle \mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq \rangle$ .
- (b) Czy jeśli  $A \times B \not\subseteq C \times C$ , to  $A \not\subseteq C$  i  $B \not\subseteq C$ ? Odpowiedź uzasadnić.

- (c) Czy jeśli  $A \Delta B \subseteq C$ , to  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow B \subseteq C$ ? Odpowiedź uzasadnić.
- (d) Czy jeśli istnieją surjekcja  $f : B \rightarrow C$  i injekcja  $g : C \rightarrow B$ , to  $B \sim C$ ? Odpowiedź uzasadnić.
3. Niech  $A, B, C$  będą dowolnymi, różnymi podzbiórami zbioru  $\mathbb{N}$ .
- (a) Zapisać symbolicznie następujące wyrażenia. Nie wolno użyć symbolu mocy zbioru  $|\cdot|$ .
- (i) Nieskończenie wiele liczb parzystych należy do zbioru  $A$ .
- (ii) Rodzina  $\{A, B, C\}$  jest podziałem zbioru  $\mathbb{N}$ .
- (b) Udowodnić, że jeśli  $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ , to  $A \times C = B \times C \Rightarrow A = B$ .
- (c) Czy jeśli  $A \cap B = A \cup C$ , to  $C \cap (B \setminus A) = \emptyset$ ? Odpowiedź uzasadnić.
- (d) Niech  $D = \{n \in \mathbb{N} : (\exists k \in \mathbb{N}) n = 3k\}$ . Czy jeśli  $|D \setminus A| < \aleph_0$ , to  $D \sim A$ ? Odpowiedź uzasadnić.
4. Niech  $A, B$  i  $C$  będą dowolnymi niepustymi podzbiórami zbioru  $\mathbb{R}$ .
- (a) Zapisać symbolicznie następujące wyrażenia.
- (i) Każdy niepusty podzbiór zbioru  $A$ , który nie jest podzbiorem zbioru  $B$ , jest podzbiorem zbioru  $C$ .
- (ii) Rodzina zbiorów  $\{A, B, C\}$  nie jest rodziną zbiorów parami rozłącznych.
- (b) Czy z faktów, że  $A \cap C = B \cap C$  i  $A \setminus C = B \setminus C$  wynika, że  $A = B$ ? Odpowiedź uzasadnić.
- (c) Czy z faktu, że  $A \cup C \neq B \cup C$  wynika, że  $A \neq B$ ? Odpowiedź uzasadnić.
- (d) Czy z faktu, że zbiory  $A$  i  $B$  są nieskończone wynika, że  $A \sim B$ ? Odpowiedź uzasadnić.
5. Niech  $A, B, C$  będą dowolnymi, różnymi podzbiórami zbioru  $\mathbb{R}$ .
- (a) Zapisać symbolicznie następujące wyrażenia.
- (i) Dokładnie dwa spośród zbiorów  $A, B, C$  są niepuste.

- (ii) Zbiór  $A$  nie jest ograniczeniem górnym rodziny  $\{B, C\}$  w zbiorze częściowo uporządkowanym  $\langle \mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq \rangle$ .
- (b) Czy warunek  $A \times B \subseteq C$  jest warunkiem wystarczającym do tego, by  $A = \emptyset$ ? Odpowiedź uzasadnić.
- (c) Czy jeśli  $\mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ , to  $C \subseteq A \cap B$ ? Odpowiedź uzasadnić.
- (d) Niech  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  oraz  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Czy z faktu, że funkcja  $f \upharpoonright A$  jest surjekcją wynika, że funkcja  $f$  jest surjekcją? Odpowiedź uzasadnić.
6. Niech  $A, B, C$  będą dowolnymi, różnymi podzbiorami zbioru  $\mathbb{R}$ .
- (a) Zapisać symbolicznie następujące wyrażenia.
- (i) Każdy element zbioru  $A$  należy do dokładnie jednego ze zbiorów  $B$  i  $C$ .
- (ii) Rodzina  $\{A, B, C\}$  nie jest łańcuchem w zbiorze częściowo uporządkowanym  $\langle \mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq \rangle$ .
- (b) Udowodnić, że jeśli niepuste zbiory  $A, B$  i  $C$  spełniają warunek (i) z punktu (a), to spełniają warunek (ii) z punktu (a).
- (c) Czy jeśli  $C \times B \subseteq C \times A$ , to  $B \subseteq A$ ? Odpowiedź uzasadnić.
- (d) Czy jeśli istnieje iniekcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow A$ , to warunek  $A \cap B \neq \emptyset$  jest warunkiem wystarczającym na to, by istniała surjekcja  $g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$ ? Odpowiedź uzasadnić.
7. Niech  $A, B, C$  będą dowolnymi niepustymi, różnymi podzbiorami zbioru  $\mathbb{R}$ .
- (a) Zapisać symbolicznie następujące wyrażenia.
- (i) Do zbioru  $A$  należą wszystkie ograniczenia dolne zbioru  $B \cup C$ .
- (ii) Rodzina  $\{A, B, C\}$  jest podziałem zbioru  $\mathbb{R}$ .
- (b) Podać przykład zbiorów  $A, B, C$ , spełniających koniunkcję warunków z punktu (a).
- (c) Czy z faktu, że  $B \subseteq A \cup C$  wynika, że  $C \subseteq (A \cup B \cup C) \setminus (A \setminus B)$ ? Odpowiedź uzasadnić.

- (d) Zakładamy, że  $(A \times C) \cap (C \times B) \neq \emptyset$ . Czy może zajść  $A \cap B \cap C = \emptyset$ ? Odpowiedź uzasadnić.
- (e) Czy z faktu, że  $0 < |(A \times A) \Delta (B \times B)| < \aleph_0$  wynika, że zbiór  $A$  jest skończony? Odpowiedź uzasadnić.

8. Rozważamy funkcję  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  daną wzorem  $f(x) = x^2 + x$ .

- (a) Wyznaczyć  $f[A]$ , gdzie  $A = [-2, 1] \cap \mathbb{Z}$ .
- (b) Wyznaczyć  $f^{-1}[B]$ , gdzie  $B = \{x \in \mathbb{N} : |x - 1| \leq 2\}$ .
- (c) Czy funkcja  $f$  jest „na”? Odpowiedź uzasadnić.
- (d) Zdefiniować funkcję  $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  tak, by obraz  $\text{rng}(g)$  był zbiorem nieskończonym i funkcja  $f \circ g$  była różnowartościowa. Odpowiedź uzasadnić.
- (e) Czy istnieje funkcja  $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  taka, by funkcja  $f \circ h$  była „na”? Odpowiedź uzasadnić.

9. Rozważmy funkcję  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  daną wzorem  $f(x) = x^2 + 1$ .

- (a) Wyznaczyć  $(f \circ f)(x^2 + 1)$ .
- (b) Wyznaczyć  $f[A]$ , gdzie  $A = [-2, 1]$ .
- (c) Wyznaczyć  $f^{-1}[B]$ , gdzie  $B = (2, 3)$ .
- (d) Rozważmy funkcję  $g_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , zadaną wzorem  $g_\alpha(x) = f(x - \alpha)$  (gdzie  $\alpha \in \mathbb{R}$  jest parametrem). Wyznaczyć zbiór

$$C = \{\alpha \in \mathbb{R} : g_\alpha \text{ jest funkcją różnowartościową}\}.$$

Odpowiedź uzasadnić.

10. Niech  $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  będzie funkcją zadaną wzorem  $F(f) = f \circ f$ . Niech  $id_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  oznacza funkcję identycznościową. Niech  $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  będzie funkcją zadaną wzorem  $h(x) = 0$ .

- (a) Podać przykład funkcji  $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \{id_{\mathbb{N}}, h\}$  takiej, że  $F(g) = g$ . Odpowiedź uzasadnić.
- (b) Czy funkcja  $F$  jest injekcją? Odpowiedź uzasadnić.

- (c) Udowodnić, że jeśli  $F(f) = id_{\mathbb{N}}$ , to funkcja  $f$  jest bijekcją.
- (d) Znaleźć zbiór  $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  jak największej mocy, o następującej własności:

$$A \subseteq F^{-1}[\{h\}].$$

11. Niech  $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  będzie rzutem na drugą oś (tzn.  $\pi_2(x, y) = y$ ). Rozważamy funkcję  $F : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$  zadaną wzorem  $F(X) = \pi_2[X]$ .

- (a) Czy funkcja  $F$  jest różnowartościowa? Odpowiedź uzasadnić.
- (b) Czy funkcja  $F$  jest surjekcją? Odpowiedź uzasadnić.
- (c) Wyznaczyć  $F^{-1}[\{-1\}]$ .
- (d) Niech  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją zadaną wzorem  $g(x) = x^2$ . Definiujemy funkcję  $G : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$  wzorem  $G(X) = g^{-1}[X]$ . Czy istnieje zbiór  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  taki, że  $|G \circ F(A)| = 3$ ? Odpowiedź uzasadnić.

12. Niech funkcja  $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$  będzie zadaną wzorem  $F(f) = f^{-1}[\{1\}]$ .

- (a) Czy funkcja  $F$  jest różnowartościowa? Odpowiedź uzasadnić.
- (b) Czy funkcja  $F$  jest „na”? Odpowiedź uzasadnić.
- (c) Niech  $S \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  będzie zbiorem wszystkich funkcji stałych. Wyznaczyć  $F[S]$ .
- (d) Wyznaczyć  $|F^{-1}[\{1\}]|$ . Odpowiedź uzasadnić.

13. Niech  $A = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f \text{ nie jest surjekcją}\}$  i niech funkcja  $F : A \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$  będzie zadaną wzorem  $F(f) = \text{rng}(f)$ .

- (a) Czy funkcja  $F$  jest różnowartościowa? Odpowiedź uzasadnić.
- (b) Czy funkcja  $F$  jest „na”? Odpowiedź uzasadnić.
- (c) Niech  $B = \{f \in A : f \text{ jest ograniczona}\}$ . Wyznaczyć  $F[B]$ .
- (d) Niech  $C = \{0, 1\}$ . Wyznaczyć  $|F^{-1}[C]|$ . Odpowiedź uzasadnić.

14. Niech  $f, g, h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  będą funkcjami danymi wzorami  $f(x) = 2x$ ,  $g(x) = x^2 - 2x + 2$  i  $h(x) = 0$ . Niech funkcja  $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  będzie dana wzorem  $F(\varphi) = \varphi \circ f$ .

- (a) Czy prawdą jest, że  $g[A] \cap g[B] \neq \emptyset \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$ ?
- (b) Czy funkcja  $F$  jest różnowartościowa?
- (c) Czy  $g \in F^{-1}[\{f\}]$ ?
- (d) Wyznaczyć  $|F^{-1}[\{h\}]|$ .

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić.

15. Niech  $X = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 6\}$ .

- (a) Czy istnieje funkcja  $f : X \rightarrow X$  taka, że  $f \circ f = id_X$  i  $(\forall x \in X) f(x) \neq x$ ? Odpowiedź uzasadnić.
- (b) Rozważmy funkcję  $g : X \rightarrow X$  daną wzorem  $g(x) = |x - 2|$ . Uzasadnić, że nie istnieje częściowy porządek  $\preceq$  na zbiorze  $X$  taki, że

$$(\forall x \in X) x \preceq g(x).$$

- (c) Rozważmy funkcję  $h : X \times \mathbb{N} \rightarrow X \times \mathbb{N}$  daną wzorem  $h(x, y) = \langle x, x + y \rangle$ .
  - (i) Wyznaczyć  $h^{-1}[\{\langle 3, 2 \rangle\}]$ .
  - (ii) Wyznaczyć  $|\text{rng}(h)|$ . Odpowiedź uzasadnić.

16. Niech  $R$  i  $S$  będą relacjami na zbiorze  $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 10\}$ , zdefiniowanymi następująco:

$$xRy \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) x^2 - y^2 = 5k, \quad xSy \Leftrightarrow x \cdot y \neq 8.$$

- (a) Uzasadnić, że  $R$  jest, a  $S$  nie jest relacją równoważności.
- (b) Wyznaczyć  $[2]_R$ .
- (c) Wyznaczyć  $|A/R|$ . Odpowiedź uzasadnić.
- (d) Czy  $R \cap S$  jest relacją równoważności? Odpowiedź uzasadnić.

17. Niech  $I = \{2, 3, 5, 7\}$ . Niech  $R \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$  będzie relacją równoważności zadaną warunkiem

$$xRy \Leftrightarrow (\forall p \in I)(p|x \Leftrightarrow p|y).$$

- (a) Czy  $12 \in [18]_R$ ?
- (b) Czy  $\{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{N}^+ / R$ ?

- (c) Czy relacja  $R \circ R$  jest spójna?
- (d) Wyznaczyć  $|\mathbb{N}^+ / R|$ .

Wszystkie odpowiedzi uzasadnić.

18. Dla każdego  $n \in \{0, 1, 2\}$  na zbiorze  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  definiujemy relację równoważności  $R_n$  warunkiem

$$f R_n g \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{N})(f(k) > n \Leftrightarrow g(k) > n).$$

Niech  $\varphi, \psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  będą funkcjami, zadanymi wzorami  $\varphi(x) = 0$ ,  $\psi(x) = x$ .

- (a) Wyznaczyć  $[\varphi]_{R_0}$ .
- (b) Wyznaczyć  $[[\varphi]_{R_1}]$ . Odpowiedź uzasadnić.
- (c) Czy  $\psi R_1 \circ R_2 \varphi$ ? Odpowiedź uzasadnić.
- (d) Wyznaczyć  $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}} / R_1|$ . Odpowiedź uzasadnić.

19. Rozważmy funkcję  $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  zadaną wzorem  $f(x, y) = x^2 - y$ . Niech  $R$  będzie relacją równoważności na zbiorze  $\mathbb{Z}^2$ , zadaną warunkiem

$$\langle x, y \rangle R \langle a, b \rangle \Leftrightarrow f(x, y) = f(a, b).$$

- (a) Czy funkcja  $f$  jest „na”? Odpowiedź uzasadnić.
- (b) Wyznaczyć klasę abstrakcji  $[\langle 0, 0 \rangle]_R$ .
- (c) Wyznaczyć obraz klasy abstrakcji  $f [[\langle 2, -3 \rangle]_R]$ .
- (d) Niech  $A \subseteq \mathbb{Z}^2$  będzie nieskończonym zbiorem, który z każdą klasą abstrakcji relacji  $R$  ma co najwyżej jeden wspólny element. Czy funkcja  $f \upharpoonright A$  jest różnowartościowa? Czy jest „na”? Odpowiedzi uzasadnić.
- (e) Niech  $X = \{0, 1, 2\}$ . Wyznaczyć  $|X^2 / R_{X^2}|$ . Odpowiedź uzasadnić.

20. Niech  $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  będą rzutami odpowiednio na pierwszą i drugą oś (tzn.  $\pi_1(x, y) = x$ ,  $\pi_2(x, y) = y$ ). Na zbiorze  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$  definiujemy relację równoważności  $R$  warunkiem

$$A R B \Leftrightarrow \pi_1[A] = \pi_1[B].$$

- (a) Niech  $C = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ . Czy  $C \in [\mathbb{R}^2]_R$ ? Odpowiedź uzasadnić.

- (b) Podać przykład zbioru  $D \in [\mathbb{R}^2]_R$ , takiego że  $|\pi_2[D]| = 2$ .
- (c) Wyznaczyć  $[\{\langle 0, 0 \rangle\}]_R$ .
- (d) Niech  $E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Czy istnieje zbiór  $F \in [E \times \mathbb{N}]_R$ , taki że  $|F| = \aleph_0$ ?  
Odpowiedź uzasadnić.

21. Niech  $T$  będzie relacją równoważności na zbiorze  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  zadaną warunkiem

$$\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle T \langle b_n : n \in \mathbb{N} \rangle \Leftrightarrow a_0 = b_0.$$

Niech  $\langle c_n : n \in \mathbb{N} \rangle$  będzie ciągiem, zadanym warunkiem  $(\forall n \in \mathbb{N}) c_n = 0$ .

- (a) Podać przykład ciągu  $\langle d_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ , różnego od ciągu  $\langle c_n : n \in \mathbb{N} \rangle$  i takiego, że

$$[\langle c_n : n \in \mathbb{N} \rangle]_T \cap [\langle d_n : n \in \mathbb{N} \rangle]_T \neq \emptyset.$$

Odpowiedź uzasadnić.

- (b) Opisać zbiór ilorazowy  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/T$ .
- (c) Jaka jest moc zbioru  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/T$ ? Odpowiedź uzasadnić.
- (d) Pokazać, że  $|\langle c_n : n \in \mathbb{N} \rangle]_T| = \mathfrak{c}$ .

22. Niech  $R$  będzie relacją równoważności na zbiorze  $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$  zadaną warunkiem

$$A R B \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{Z}) B = A + x,$$

gdzie  $A + x = \{a + x : a \in A\}$ .

- (a) Czy  $\{1, 2, 4\} \in [\{5, 7, 8\}]_R$ ? Odpowiedź uzasadnić.
- (b) Czy istnieje pięcioelementowa klasa abstrakcji relacji  $R$ ? Odpowiedź uzasadnić.
- (c) Wyznaczyć  $|\{\mathcal{A} \in (\mathcal{P}(\mathbb{Z}))/_R : (\forall B \in \mathcal{A})|B| = 1\}|$ . Odpowiedź uzasadnić.
- (d) Udowodnić, że  $|\{\mathcal{A} \in (\mathcal{P}(\mathbb{Z}))/_R : (\forall B \in \mathcal{A})|B| = 2\}| = \aleph_0$ .
- (e) Wyznaczyć  $|\mathcal{P}(\mathbb{Z})/_R|$ . Odpowiedź uzasadnić.

23. Rozważmy relację równoważności  $R$  na zbiorze funkcji  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  zadaną warunkiem

$$f R g \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(f(n) \geq 0 \Leftrightarrow g(n) \geq 0).$$

- (a) Niech funkcje  $f, g \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  będą zadane wzorami  $f(n) = n^2 - 1$  i  $g(n) = n$ . Czy  $[f]_R = [g]_R$ ? Odpowiedź uzasadnić.
- (b) Wyznaczyć klasę abstrakcji funkcji  $h \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ , zadanej wzorem  $h(n) = (-1)^n$ .
- (c) Znaleźć zbiór  $A \subseteq \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  jak największej mocy, mający następującą własność:

$$(\forall f, g \in A) f \neq g \Rightarrow \neg f R g.$$

24. Niech  $R$  będzie relacją równoważności na zbiorze  $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$  zadaną warunkiem  $ARB \Leftrightarrow (A \subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \wedge B \subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \wedge A = B) \vee (A \not\subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \wedge B \not\subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \wedge A \cap \mathbb{N} = B \cap \mathbb{N})$ .

- (a) Czy  $\{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\} \in [\{1\}]_R$ ? Odpowiedź uzasadnić.
- (b) Podać przykład zbioru  $C \subseteq \mathbb{Z}$ , takiego że  $|[C]_R| < \aleph_0$ . Odpowiedź uzasadnić.
- (c) Podać przykład nieskończonego zbioru  $D \subseteq \mathbb{Z}$  takiego, że

$$D \in [\{x \in \mathbb{Z} : |x + 1| \leq 1\}]_R.$$

- (d) Wyznaczyć  $|\mathbb{Z}|_R$ . Odpowiedź uzasadnić.
- (e) Wyznaczyć  $|\mathcal{P}(\mathbb{Z})/R|$ . Odpowiedź uzasadnić.

25. Niech  $X = \{n \in \mathbb{N}^+ : n \leq 6\}$ . Niech funkcja  $f : X \rightarrow X$  będzie dana wzorem  $f(x) = \lfloor \sqrt{3x} \rfloor$ , gdzie  $\lfloor x \rfloor$  oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od  $x \in \mathbb{R}$ . Na zbiorze  $\mathcal{P}(X)$  definiujemy relację równoważności  $R$  warunkiem

$$ARB \Leftrightarrow f[A] = f[B]$$

oraz relację  $S$  warunkiem

$$ASB \Leftrightarrow f^{-1}[A] \subseteq f^{-1}[B].$$

- (a) Wyznaczyć  $[\emptyset]_R$ .
- (b) Czy  $\{3, 6\} S \circ R \{4\}$ ? Odpowiedź uzasadnić.
- (c) Wyznaczyć  $|\mathcal{P}(X)/R|$ . Odpowiedź uzasadnić.
- (d) Wyznaczyć największy zbiór  $C \in \mathcal{P}(X)$ , dla którego relacja  $S \upharpoonright \mathcal{P}(C)$  jest relacją częściowego porządku. Odpowiedź uzasadnić.

26. Niech  $X = \{(a, b) : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b\}$ . Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany  $\langle X, \preceq \rangle$ , gdzie

$$I \preceq J \Leftrightarrow \inf I \leq \inf J \wedge \sup I \leq \sup J.$$

- (a) Czy istnieje  $J \in X$  nieporównywalny z przedziałem  $(0, 2)$  i taki, że  $J \preceq (1, 3)$ ? Odpowiedź uzasadnić.
- (b) Podać przykład nieprzeliczalnego antyłańcucha w  $X$ .
- (c) Podać przykład nieskończonego łańcucha w  $X$ , którego żadne dwa elementy nie są rozłączne.
- (d) Czy w zbiorze  $A = \mathcal{P}([0, 1]) \cap X$  istnieje element maksymalny? Odpowiedź uzasadnić.

27. Niech  $\leq_1$  będzie częściowym porządkiem na zbiorze  $\mathbb{R}$ , zadany warunkiem

$$x \leq_1 y \Leftrightarrow (\forall z \in \mathbb{R})(x < z \Rightarrow y < z).$$

Poniższe pytania dotyczą zbioru uporządkowanego  $\langle \mathbb{R}, \leq_1 \rangle$ .

- (a) Czy  $3 \leq_1 \pi$ ? Odpowiedź uzasadnić.
- (b) Czy porządek  $\leq_1$  jest liniowy? Odpowiedź uzasadnić.
- (c) Wskazać podzbiór  $B \subseteq \mathbb{R}$ , w którym nie ma elementu maksymalnego i  $\sup B = 2$ .
- (d) Niech  $\leq_2$  będzie obcięciem relacji  $\leq_1$  do zbioru  $\mathbb{N}$ . Czy dla dowolnych  $x, y \in \mathbb{N}$  prawdą jest, że

$$x \leq_2 y \Leftrightarrow (\forall z \in \mathbb{N})(x < z \Rightarrow y < z)?$$

Odpowiedź uzasadnić.

28. Niech relacja  $\preceq$  będzie częściowym porządkiem na zbiorze  $\mathbb{N}^2$ , zadany warunkiem

$$\langle x, y \rangle \preceq \langle a, b \rangle \Leftrightarrow (x = a \wedge y = b) \vee (x < a \wedge y < b).$$

- (a) Podać przykład nieskończonego antyłańcucha w  $\mathbb{N}^2$ .
- (b) Wyznaczyć zbiór elementów minimalnych w  $\mathbb{N}^2$ .

- (c) Niech  $\pi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  będzie rzutem na pierwszą oś (tzn.  $\pi(x, y) = x$ ). Czy istnieje nieskończony łańcuch  $L \subseteq \mathbb{N}^2$  taki, że  $|\pi[L]| < \aleph_0$ ? Odpowiedź uzasadnić.

29. Niech  $X = \{(a, b) : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b\}$ . Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany  $\langle X, \preceq \rangle$ , gdzie

$$I \preceq J \Leftrightarrow I = J \vee \sup I \leq \inf J.$$

- (a) Czy istnieje  $J \in X$  taki, że  $(0, 1) \prec J \prec (1, 2)$ ? Odpowiedź uzasadnić.
- (b) Czy w  $\mathcal{P}((-\infty, 1)) \cap X$  istnieje element największy? Odpowiedź uzasadnić.
- (c) Podać przykład nieskończonego antyłańcucha  $\mathcal{A} \subseteq X$ , takiego że  $\bigcap_{I \in \mathcal{A}} I = \emptyset$ .
- (d) Czy istnieje nieprzeliczalny łańcuch w  $X$ ? Odpowiedź uzasadnić.

30. Niech  $\preceq$  będzie częściowym porządkiem na zbiorze  $\mathbb{N}^+$  zadany wzorem

$$x \preceq y \Leftrightarrow (2|x \wedge 2|y \wedge (\exists k \in \mathbb{N}) y = 2^k x) \vee (2 \nmid x \wedge 2 \nmid y \wedge x \leq y).$$

Pytania dotyczą zbioru częściowo uporządkowanego  $\langle \mathbb{N}^+, \preceq \rangle$ .

- (a) Czy  $2 \preceq 12$ ? Odpowiedź uzasadnić.
- (b) Czy w zbiorze  $\mathbb{N}^+$  istnieje element maksymalny? Odpowiedź uzasadnić.
- (c) Podać przykład nieskończonego antyłańcucha w zbiorze  $\mathbb{N}^+$ .
- (d) Czy istnieje element  $z \in \mathbb{N}^+$ , który ma dwa nieporównywalne poprzedniki (element  $t \in \mathbb{N}^+$  nazywamy poprzednikiem elementu  $z \in \mathbb{N}^+$ , gdy  $t \prec z$ )? Odpowiedź uzasadnić.

31. Niech  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  będzie bijekcją zadaną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{jeśli } x < 0 \\ 2x & \text{jeśli } x \geq 0. \end{cases}$$

Niech  $\preceq$  będzie częściowym porządkiem na zbiorze  $\mathbb{N}$ , zadanym warunkiem

$$n \preceq m \Leftrightarrow f^{-1}(n) \leq f^{-1}(m).$$

Podpunkty (a)–(c) dotyczą zbioru częściowo uporządkowanego  $\langle \mathbb{N}, \preceq \rangle$ .

- (a) Czy  $7 \prec 9$ ? Odpowiedź uzasadnić.
- (b) Czy istnieje zbiór  $A \subseteq \mathbb{N}$ , który ma dwa różne elementy maksymalne? Odpowiedź uzasadnić.
- (c) Podać przykład zbioru  $B \subseteq \mathbb{N}$ , nieograniczonego z dołu i takiego, że  $\sup B = 4$ .
- (d) Niech  $g = f \upharpoonright \mathbb{N}$  i niech  $C = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100\}$ . Wyznaczyć  $(g \circ f)^{-1}[C]$ .

32. Niech  $\preceq$  będzie częściowym porządkiem na  $(\mathbb{N}^+)^2$  zadany wzorem

$$\langle x, y \rangle \preceq \langle a, b \rangle \Leftrightarrow x|a \wedge b \leq y.$$

- (a) Niech  $A = \{2, 4, 6\}^2$ .
  - (i) Narysować (czytelny) diagram Hassego zbioru częściowo uporządkowanego  $\langle A, \preceq \rangle$  (z podpisaniem wierzchołków).
  - (ii) Wyznaczyć kres górny zbioru  $A$  (w  $(\mathbb{N}^+)^2$ ).
- (b) Czy w zbiorze częściowo uporządkowanym  $\langle (\mathbb{N}^+)^2, \preceq \rangle$  jest element maksymalny? Odpowiedź uzasadnić.
- (c) Podać przykład łańcucha  $L \subseteq (\mathbb{N}^+)^2$  takiego, że

$$|\{x \in \mathbb{N}^+ : (\exists y \in \mathbb{N}^+) \langle x, y \rangle \in L\}| = \aleph_0$$

oraz

$$|\{y \in \mathbb{N}^+ : (\exists x \in \mathbb{N}^+) \langle x, y \rangle \in L\}| > 1.$$

33. Na zbiorze  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  definiujemy relację częściowego porządku warunkiem

$$f \preceq g \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) f(n) \leq g(n).$$

- (a) Jakie są elementy największe, najmniejsze, maksymalne i minimalne w zbiorze częściowo uporządkowanym  $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \preceq \rangle$  (jeśli istnieją – wskazać, jeśli nie istnieją – uzasadnić)?
- (b) Wskazać nieskończony łańcuch w zbiorze częściowo uporządkowanym  $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \preceq \rangle$ .
- (c) Niech  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  będzie dana wzorem  $h(n) = n + 1$ . Pokazać, że

$$|\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f \preceq h\}| = \mathfrak{c}.$$

34. Niech relacja  $\preceq$  będzie częściowym porządkiem na zbiorze  $\mathbb{R}$ , zadany warunkiem

$$x \preceq y \Leftrightarrow x = y \vee \{x\} < \{y\},$$

gdzie  $\{x\}$  oznacza część ułamkową z liczby  $x$ . Polecenia dotyczą zbioru częściowo uporządkowanego  $\langle \mathbb{R}, \preceq \rangle$ .

- (a) Czy istnieje  $x \in \mathbb{R}$  takie, że  $\frac{10}{3} \prec x \prec \frac{5}{2}$ ? Odpowiedź uzasadnić.
- (b) Czy w  $\mathbb{R}$  istnieje element najmniejszy? Odpowiedź uzasadnić.
- (c) Podać przykład nieskończonego zbioru  $A \subseteq \mathbb{R}$ , takiego że w  $A$  istnieją dokładnie dwa elementy maksymalne.
- (d) Czy w  $\mathbb{R}$  istnieje nieprzeliczalny antyłańcuch? Odpowiedź uzasadnić.

35. Niech relacja  $\preceq$  będzie częściowym porządkiem na zbiorze  $\mathbb{R}^2$ , zadany warunkiem

$$\langle x, y \rangle \preceq \langle a, b \rangle \Leftrightarrow (x = a \wedge y = b) \vee (x^2 + y^2 < a^2 + b^2).$$

Polecenia dotyczą zbioru częściowo uporządkowanego  $\langle \mathbb{R}^2, \preceq \rangle$ .

- (a) Wyznaczyć zbiór elementów minimalnych.
- (b) Łańcuch  $L \subseteq \mathbb{R}^2$  nazywamy *łańcuchem maksymalnym*, jeśli nie istnieje łańcuch  $L' \subseteq \mathbb{R}^2$ , będący właściwym nadzbiorem łańcucha  $L$ . Podać przykład łańcucha maksymalnego.
- (c) Czy zbiór  $A = [-1, 1]^2$  ma kres górny? Odpowiedź uzasadnić.
- (d) Czy istnieje nieskończony podzbiór  $B \subseteq \mathbb{R}^2$ , taki że relacja  $\preceq \upharpoonright B$  jest relacją równoważności na zbiorze  $B$ ? Odpowiedź uzasadnić.

## Rozdział 2

### Wskazówki do zadań

- Czy narzucająca się odpowiedź jest na pewno kompletna?
  - Żadnych kwantyfikatorów (bo i po co?)!
  - Czy z faktu, że  $A \subseteq C$  wynika, że  $A \setminus B \subseteq C$ ?
  - Pokazać, że jeśli  $B \times C \subseteq C \times A$ , to  $B \subseteq C$  i  $C \subseteq A$ .
  - Im mniej zakładamy o mocy zbioru  $B$ , tym słabszy warunek dostajemy.
- Czy jeśli  $\langle x, y \rangle \notin C \times C$ , to  $x \notin C$  i  $y \notin C$ ?
  - Skorzystać z równości  $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .
  - Jakie znane warunki, równoważne nierówności  $|B| \leq |C|$ ?
- Podzbiór zbioru liczb naturalnych jest nieskończony dokładnie wtedy, gdy jest nieograniczony.
    - Jakie trzy warunki spełnia podział? Uproszczenie: o zbiorach  $A, B, C$  wiemy, że są różne.
  - Kluczowa jest niepustość zbioru  $C$ .
  - Nie wprost?
  - Wiemy, że  $D = (D \cap A) \cup (D \setminus A)$ .
- Bez kwantyfikatorów.
  - Patrz wskazówka do zad.
  - Kontrapozycja?
  - Czy jeden zbiór może być bardziej nieskończony od drugiego?.
- Ile spośród zbiorów  $A, B, C$  jest pustych?
    - Bez kwantyfikatorów.

- (b) Co wynika z faktu, że zbiór  $A \times B$  jest pusty.
  - (c) Wiemy, że  $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(Y) \Rightarrow X \subseteq Y$ .
  - (d) Funkcja jest surjekcją, gdy przyjmuje wszystkie możliwe wartości.
6. (a) (i) Skorzystać z przydatnej operacji teoriomnogościowej.  
(ii) Któreś zbiory muszą być nieporównywalne w sensie zawierania.
- (b) Nie wprost.
  - (c) Czy zbiory  $A, B, C$  są niepuste?
  - (d) Czy jeśli przekrój pewnego zbioru ze zbiorem dużym jest niepusty, to też musi być duży?
7. (a) (i) Każda liczba rzeczywista, jeśli jest ograniczeniem dolnym zbioru  $B \cup C$ , to należy do zbioru  $A$ ;  
(ii) Co z założenia wiemy o zbiorach  $A, B, C$ ?
- (b) Przedziały i półproste?
  - (c) Diagram Venna może pomóc w podjęciu decyzji.
  - (d) Co wynika z założenia? Czy to wystarczy?
  - (e) Niepustość jest istotna, a rysunek może pomóc.
8. (a)  $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ .
- (b)  $B = \{0, 1, 2, 3\}$ .
  - (c) Jaka jest przeciwdziedzina funkcji  $f$ ?
  - (d) Funkcja  $g$  musi być różnowartościowa, podobnie jak obcięcie funkcji  $f$  do obrazu funkcji  $g$ .
  - (e) Patrz podpunkt (c).
9. (a)  $(f \circ f)(x^2 + 1) = f(f(x^2 + 1)) = f((x^2 + 1)^2 + 1)$ .
- (b) Wykres może pomóc.
  - (c) Wykres może pomóc.
  - (d)  $f(x - \alpha) = (x - \alpha)^2 + 1 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + 1$ .
10. (a) Funkcja bardzo podobna do funkcji  $h$ ?
- (b) Nie.
  - (c) Wprost z definicji bijekcji.
  - (d) Jak znaleźć continuum funkcji, z których każda po złożeniu z sobą samą daje funkcję stałą, równą zero? Wystarczy ograniczyć się do funkcji zero-jedynkowych.

11. (a) Czy istnieją dwa podzbiory płaszczyzny o tym samym rzucie na oś  $OY$ ?
- (b) W jaki sposób, mając dany podzbiór prostej, skonstruować podzbiór płaszczyzny, którego rzutem będzie dany podzbiór?
- (c)  $F^{-1}[\{-1\}]$  to rodzina podzbiorów płaszczyzny. Teraz trzeba dokładnie odczytać z definicji przeciwobrazu, co to znaczy, że  $X \in F^{-1}[\{-1\}]$ .
- (d) Czy istnieje podzbiór prostej rzeczywistej, którego przeciwobraz przez funkcję  $g$  ma dokładnie 3 elementy?
12. (a) Czy istnieją dwa różne ciągi liczb naturalnych, mające jedynki na tych samych miejscach?
- (b) Czy mając dany podzbiór zbioru liczb naturalnych umiemy wskazać ciąg, dla którego zbiór numerów wyrazów równych 1 pokrywa się z danym zbiorem?
- (c) Wynikiem musi być rodzina podzbiorów  $\mathbb{N}$ .
- (d) Pamiętajmy, że  $F^{-1}[\{1\}] \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ . Następnie korzystamy uważnie z definicji przeciwobrazu, by zorientować się, z jakich dokładnie funkcji składa się rozważany przeciwobraz. By wyznaczyć jego moc, dokonujemy szacowań – do otrzymania oszacowania z dołu wystarczy znaleźć podzbiór zbioru  $F^{-1}[\{1\}]$  o którym łatwo możemy stwierdzić, że ma moc continuum.
13. (a) Czy trudno znaleźć dwie różne funkcje o tym samym obrazie?
- (b) Co wynika z faktu, że elementy zbioru  $A$  nie są surjekcjami?
- (c) Co możemy powiedzieć o obrazie funkcji ograniczonej?
- (d) Które funkcje mają obraz  $\{0, 1\}$ ?
14. (a) Kontrapozycja?
- (b) Warto zauważyć, że działanie funkcji  $F$  polega na wybieraniu pewnego podciągu.
- (c) Czy  $F(g) = f$ ?
- (d) Ile jest ciągów liczb naturalnych, których parzyste wyrazy są zerami?
15. (a) Funkcja  $f$  o podanych własnościach łączy elementy zbioru  $X$  w pary.
- (b) Nie wprost.

- (c) (i) Dla jakich par  $\langle x, y \rangle$  mamy  $x = 3$  i  $x + y = 2$ ?  
(ii) Tw. Cantora-Bernsteina.
16. (a) Czy relacja  $S$  jest przechodnia?  
(b) Kwadraty jakich liczb dają resztę 4 w dzieleniu przez 5?  
(c) Najprościej – wyznaczyć zbiór ilorazowy, najszybciej – zbadać reszty kwadratów w dzieleniu przez 5.  
(d) Czy relacja  $R \cap S$  jest przechodnia?
17. (a) Jakie dzielniki ze zbioru  $I$  mają liczby 12 i 18?  
(b) Czy liczby 1 i 3 są w relacji  $R$ ?  
(c) Czy istnieje spójna, nietrywialna relacja równoważności?  
(d) Jaka cecha jest wyabstrahowana? Jakie są jej możliwe wartości? Ile ich jest?
18. (a) Wystarczy dobrze zrozumieć definicję relacji – odpowiedź jest prosta.  
(b) Trzeba odczytać z definicji, jakim zbiorem jest  $[\varphi]_{R_1}$ .  
(c) Czy może istnieć świadek na to, że  $\psi R_1 \circ R_2 \varphi$ ?  
(d) Zastanowić się, jakie są możliwe wartości cechy, wyabstrahowanej przy pomocy relacji  $R_1$ , albo znaleźć dużo funkcji, parami nierównoważnych względem tej relacji.
19. (a) Tak.  
(b) Jakie pary przechodzą przez funkcję  $f$  na 0?  
(c) Bycie w jednej klasie abstrakcji relacji  $R$  to dawanie tej samej wartości przez funkcję  $f$ .  
(d) „Co najwyżej” jest kluczowe.  
(e) Nie należy bać się notacji – to proste zadanie.
20. (a) Wyznaczyć rzuty obu zbiorów.  
(b) Trzeba podać przykład zbioru, znając jego rzuty na obie osie.  
(c)  $[\{\langle 0, 0 \rangle\}]_R \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$  – uwaga na byty (i zbiór pusty...!)  
(d) Co to jest  $\pi_1[E \times \mathbb{N}]$ ?
21. (a) Jaki ciąg jest równoważny z ciągiem  $\langle c_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ ?  
(b) Warto zastanowić się, jaki jest efekt procesu abstrahowania – to pomoże elegancko opisać zbiór ilorazowy.

- (c) Wprost z (b) – pod warunkiem, że mamy porządkny opis...
  - (d) Tw. Cantora-Bernsteina – oszacowanie z dołu nie jest trudne, wystarczy zdefiniować odpowiednią injekcję.
22. (a) Skojarz relację  $R$  z przesuwaniem (translacją) zbiorów.
- (b) Odpowiedz najpierw na to samo pytanie dla dwuelementowej klasy abstrakcji.
  - (c) Ile jest klas abstrakcji, składających się ze zbiorów jednoelementowych?
  - (d) Po czym poznajemy, że dwie pary liczb całkowitych są w relacji  $R$ ?
  - (e) Kluczowe jest dobre oszacowanie z dołu.
23. (a) Jakie są wartości funkcji  $f$  i  $g$  w zerze.
- (b) Trzeba dokładnie opisać szukany zbiór (ważne są zarówno miejsca parzyste, jak i nieparzyste).
  - (c) Można wskazać zbiór  $A$  mocy continuum.
24. (a)  $\{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}, \{1\} \not\subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ .
- (b)  $C \subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ ?
  - (c)  $\{-2, -1, 0\} \not\subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ .
  - (d)  $[\mathbb{Z}]_R = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) : \mathbb{N} \subseteq A\}$ .
  - (e) Czy dwa różne podzbiory zbioru liczb naturalnych wyznaczają różne klasy abstrakcji relacji  $R$ ?
25. (a) Czy niepusty zbiór może mieć pusty obraz?
- (b) Tak.
  - (c) Uwaga! Opisywanie zbioru ilorazowego „na piechotę” jest ryzykowne...
  - (d) Jakiej cechy brakuje relacji  $S$  do bycia częściowym porządkiem?
26. (a) Kiedy dwa przedziały są nieporównywalne?
- (b) Jw.
  - (c) Wystarczy ustalić jeden koniec i zmieniać drugi.
  - (d) Nie.
27. (a) Czy porządek  $\leq_1$  da się opisać w prostszy sposób?

- (b) Natychmiastowe, gdy znamy ww. prostszy opis.
  - (c) Odcinek otwarty?
  - (d) Tak.
28. (a)  $\langle 0, 0 \rangle \not\leq \langle 0, 1 \rangle$ .
- (b)  $\langle 0, 0 \rangle \not\leq \langle 1, 0 \rangle$ .
- (c) Nie.
29. (a) Nie.
- (b) Czy można znaleźć dwa elementy maksymalne?
- (c) Rodzina zstępująca?
- (d) Gdy dwa różne odcinki są porównywalne, to są rozłączne.
30. (a) Czy liczba 12 jest potęgą liczby 2?
- (b) Dla każdej liczby nieparzystej łatwo znaleźć liczbę od niej większą (w sensie  $\leq$ ). A dla parzystej?
- (c) Szukamy wśród podzbiorów zbioru liczb parzystych.
- (d) Nie.
31. (a) Rysunek może pomóc.
- (b) Czy w zbiorze uporządkowanym  $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$  istnieją dwa różne elementy maksymalne?
- (c) Zbiór liczb nieparzystych plus coś?
- (d) Można skorzystać z faktu, że  $(g \circ f)^{-1}[C] = f^{-1}[g^{-1}[C]]$ .
32. (a) (ii) Zaczynamy od szukania ograniczenia górnego.
- (b) Patrzymy na pierwszą oś.
- (c) Warto najpierw znaleźć nieskończony łańcuch przy ustalonej drugiej współrzędnej, a potem trochę go poprawić, by spełnić drugi warunek.
33. (a) Czy dla każdej funkcji istnieje funkcja od niej większa?
- (b) Warto zacząć od funkcji stale równej zero.
- (c) Dobry rysunek bardzo pomaga w znalezieniu prostych szacowań.
34. (a)  $\{\frac{10}{3}\} = \frac{1}{3}$ ,  $\{\frac{5}{2}\} = \frac{1}{2}$ .
- (b) Ile jest elementów minimalnych w zbiorze  $\mathbb{R}$ ?

- (c) Elementy maksymalne muszą mieć tę samą część ułamkową.
  - (d) Kiedy dwie liczby są nieporównywalne?
35. (a) Nie ma ich zbyt dużo.
- (b) Prosta nie jest dobra.
  - (c) Jak ograniczyć z góry wierzchołki kwadratu?
  - (d) Kiedy relacja porządku może być relacją równoważności?

## Rozdział 3

### Odpowiedzi do zadań

1. (a) Zbiór  $D$  jest pusty lub ma przynajmniej dwa elementy.  
(b)  $A \cap B = \emptyset \wedge A \cap C = \emptyset \wedge B \cap C = \emptyset$ .  
(c) Tak. Ponieważ  $A \setminus B \subseteq A$ , więc jeśli  $A \subseteq C$ , to tym bardziej  $A \setminus B \subseteq C$ , co z kolei jest równoważne warunkowi  $(A \setminus B) \cup C = C$ .  
(d) Nie. Przypuśćmy nie wprost, że  $B \times C \subseteq C \times A$ . Ustalmy dowolne  $b \in B$  i niech  $c$  będzie elementem zbioru  $C$  (takowy istnieje, bo  $C \neq \emptyset$ ). Wówczas  $\langle b, c \rangle \in B \times C$ , zatem  $\langle b, c \rangle \in C \times A$ , czyli w szczególności  $b \in C$ . Oznacza to, że  $B \subseteq C$ . Rozumując analogicznie pokazujemy, że  $C \subseteq A$ . Wobec tego  $B \subseteq A$ . Wówczas  $A \cap B = B$  i mamy

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(B) \neq \{\emptyset\}$$

(bo  $B \neq \emptyset$ ), wbrew założeniu.

- (e) Niech  $|A| = \mathfrak{c}$  i  $|B| < \mathfrak{c}$ . Wówczas  $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$ , czyli  $A \setminus B \sim \mathbb{R}$  (warto też zauważyć, że warunek  $|B| < \mathfrak{c}$  można by zastąpić jeszcze słabszym warunkiem  $|A \cap B| < \mathfrak{c}$  – gdyby treść zadania na to pozwalała...).
2. (a) (i)  $(\forall X \subseteq A)(X \subseteq B \vee (\exists Y \subseteq C)(Y \neq \emptyset \wedge X \cap Y = \emptyset))$ ;  
(ii)  $\neg A \subseteq B \wedge \neg B \subseteq A \wedge \neg A \subseteq C \wedge \neg C \subseteq A \wedge \neg B \subseteq C \wedge \neg C \subseteq B$ .  
(b) Nie. Zauważmy, że jeśli  $\langle x, y \rangle \in A \times B \setminus C \times C$ , to wprowadzie  $x \in A$  i  $y \in B$ , ale  $x \notin C$  **lub**  $y \notin C$ . Zatem jedno z zawierań  $A \subseteq C$ ,  $B \subseteq C$  nie będzie zachodzić, ale niekoniecznie oba. Pozostaje podać kontrprzykład, np.  $A = \{1\}$ ,  $B = \{2\}$ ,  $C = \{2, 3\}$ .  
(c) Tak. Załóżmy, że  $A \Delta B \subseteq C$  i  $A \cap B = \emptyset$ . Ponieważ  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ , więc  $A \cup B \subseteq C$ . Ale wówczas tym bardziej  $B \subseteq C$ .

- (d) Nie. Warunki podane w zadaniu są równoważne i znaczą to samo:  $|B| \leq |C|$ . Zatem kontrprzykład to np.  $B = \mathbb{N}$ ,  $C = \{0\}$ ,  $f(n) = 0$ ,  $g(0) = 0$ .
3. (a) (i)  $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in A)(m \geq n \wedge 2|m)$ ;  
(ii)  $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge C \neq \emptyset \wedge A \cap B = \emptyset \wedge B \cap C = \emptyset \wedge A \cap C = \emptyset \wedge A \cup B \cup C = \mathbb{N}$ .
- (b) Załóżmy nie wprost, że  $A \neq B$ . Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że istnieje  $a \in A \setminus B$ . Ustalmy dowolne  $c \in C$  (możemy to zrobić, bo z założenia  $A \cap B \cap C \neq \emptyset$  wynika, że  $C \neq \emptyset$ ). Wówczas  $\langle a, c \rangle \in A \times C$ , ale  $\langle a, c \rangle \notin B \times C$ , czyli  $A \times C \neq B \times C$ , wbrew założeniu. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.
- (c) Tak. Przypuśćmy nie wprost, że istnieje  $x \in C \cap (B \setminus A)$ . Wówczas w szczególności  $x \in C$  i  $x \notin A$ . Pierwszy warunek zapewnia nam, że  $x \in A \cup C$ , a drugi – że  $x \notin A \cap B$ . Wobec tego  $A \cap B \neq A \cup C$ , sprzeczność.
- (d) Tak. Łatwo można pokazać, że  $|D| = \aleph_0$ . Ponieważ  $D = (D \cap A) \cup (D \setminus A)$ , więc skoro zbiór  $D \setminus A$  jest skończony, to zbiór  $D \cap A$  musi być nieskończony. Tym bardziej nieskończony jest zbiór  $A$ , jako nadzbiór zbioru  $D \cap A$ . Ale wiemy, że  $A \subseteq \mathbb{N}$ , czyli (z tw. Cantora-Bernsteina) otrzymujemy  $|A| = \aleph_0$ . Wobec tego  $A \sim D$ .
4. (a) (i)  $(\forall X \subseteq A)(X \neq \emptyset \Rightarrow (X \not\subseteq B \Rightarrow X \subseteq C))$ ;  
(ii)  $A \cap B \neq \emptyset \vee B \cap C \neq \emptyset \vee A \cap C \neq \emptyset$ .
- (b) Tak. Mamy  $A = (A \cap C) \cup (A \setminus C) = (B \cap C) \cup (B \setminus C) = B$ .
- (c) Tak. Zgodnie z zasadą kontrapozycji wystarczy zauważyć, że jeśli  $A = B$ , to  $A \cup C = B \cup C$ . Ale to jest oczywiste.
- (d) Nie. Np. zbiory  $\mathbb{N}$  i  $\mathbb{R}$  są nieskończone, ale  $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$ .
5. (a) (i)  
 $(\exists X \in \{A, B, C\})(X = \emptyset \wedge (\forall Y \in \{A, B, C\})(Y = \emptyset \Rightarrow Y = X))$ ,  
ale można też  
 $(A = \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge C \neq \emptyset) \vee (B = \emptyset \wedge A \neq \emptyset \wedge C \neq \emptyset) \vee (C = \emptyset \wedge A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset)$ ;  
(ii)  $\neg B \subseteq A \vee \neg C \subseteq A$ .
- (b) Nie. Ponieważ zbiór  $A \times B$ , jeśli jest niepusty, to jest zbiorem par liczb rzeczywistych, więc nie może się wówczas zawierać w zbiorze  $C$ . Zatem  $A \times B = \emptyset$ . Stąd jednak nie wynika, że  $A = \emptyset$ , bo równie dobrze może być  $B = \emptyset$ . Kontrprzykład:  $A = \{1\}$ ,  $B = \emptyset$ ,  $C = \{2\}$ .

- (c) Tak. Wiemy, że  $X \subseteq Y \cap Z$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $X \subseteq Y$  i  $X \subseteq Z$  oraz że jeśli  $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(Y)$ , to  $X \subseteq Y$ . Wobec tego jeśli  $\mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ , to  $\mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{P}(A)$  i  $\mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{P}(B)$ , skąd  $C \subseteq A$  i  $C \subseteq B$ . Zatem  $C \subseteq A \cap B$ , co kończy dowód.
- (d) Tak. Skoro  $A \subseteq \mathbb{R}$ , to  $\text{rng}(f \upharpoonright A) \subseteq \text{rng}(f)$  (bo wartości funkcji obciętej są też wartościami funkcji obcinanej). Ale z założenia mamy  $\text{rng}(f \upharpoonright A) = \mathbb{R}$ , więc tym bardziej  $\text{rng}(f) = \mathbb{R}$ , czyli  $f$  jest surjekcją.
6. (a) (i)  $A \subseteq B \Delta C$ ;  
(ii)  $(\exists X, Y \in \{A, B, C\})(X \not\subseteq Y \wedge Y \not\subseteq X)$  lub  
 $(A \not\subseteq B \wedge B \not\subseteq A) \vee (A \not\subseteq C \wedge C \not\subseteq A) \vee (B \not\subseteq C \wedge C \not\subseteq B)$ .
- (b) Przypuśćmy nie wprost, że zbiory  $A, B, C$  tworzą łańcuch. Gdyby zbiór  $A$  zawierał którykolwiek ze zbiorów  $B, C$ , to z założenia (i) wnioskujemy, że  $B \subseteq B \Delta C$  lub  $C \subseteq B \Delta C$ , skąd wynika  $B \cap C = \emptyset$ , co jest niemożliwe. Zatem  $A \subseteq B$  i  $A \subseteq C$ , skąd  $A \subseteq B \cap C$ , czyli  $A \cap (B \Delta C) = \emptyset$ . Ale z warunku (i) wiemy, że  $A \subseteq B \Delta C$ . Wobec tego  $A = \emptyset$ , wbrew założeniu.
- (c) Nie. Jeśli  $C = \emptyset$ , to założenie jest spełnione, niezależnie od zbiorów  $A$  i  $B$ . Kontrprzykład:  $A = \{1\}$ ,  $B = \{2\}$ ,  $C = \emptyset$ .
- (d) Nie. Pytamy się bowiem, czy jeśli zbiór  $A$  ma moc continuum i  $A \cap B \neq \emptyset$ , to zbiór  $A \cap B$  ma moc continuum. Kontrprzykład:  $A = \mathbb{R}$ ,  $B = \{0\}$ .
7. (a) (i)  $(\forall m \in \mathbb{R})(\forall x \in B \cup C)(m \leq x) \Rightarrow m \in A$ ;  
(ii)  $(A \cap B = \emptyset) \wedge (A \cap C = \emptyset) \wedge (B \cap C = \emptyset) \wedge (A \cup B \cup C = \mathbb{R})$ .
- (b) Np.  $A = (-\infty, 0]$ ,  $B = (0, 1)$ ,  $C = [1, +\infty)$ .
- (c) Nie. Z diagramu Venna można odczytać, że dobrym kontrprzykładem będą takie zbiory  $A, B, C$ , że  $(A \cap C) \setminus B \neq \emptyset$ , np.  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1\}$ ,  $C = \{2\}$ .
- (d) Tak. Z założenia wynika, że istnieje para  $\langle x, y \rangle \in (A \times C) \cap (C \times B)$ , skąd  $x \in A \cap C$  i  $y \in B \cap C$ . To jednak za mało, by przekrój  $A \cap B \cap C$  musiał być niepusty. Przykład:  $A = \{1\}$ ,  $B = \{2\}$ ,  $C = \{1, 2\}$ .
- (e) Tak. Przypuśćmy bowiem nie wprost, że zbiór  $A$  jest nieskończony. Zauważmy, że wówczas zbiór  $A \times A$  również jest nieskończony, zatem nieskończony musi być też zbiór  $B$ . Istotnie, w przeciwnym przypadku zbiór  $B \times B$  byłby skończony, co oznacza, że zbiór  $(A \times A) \setminus (B \times B)$  byłby nieskończony. Ale  $(A \times A) \setminus (B \times B) \subseteq$

$(A \times A) \Delta (B \times B)$  i otrzymujemy sprzeczność ze skończonością zbioru  $(A \times A) \Delta (B \times B)$ .

Dalej, z założenia wiemy, że istnieje  $\langle x, y \rangle \in (A \times A) \Delta (B \times B)$ . Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że  $\langle x, y \rangle \in (A \times A) \setminus (B \times B)$  (to założenie jest nieuprawnione, dopóki nie pokażemy, że  $|B| \geq \aleph_0$ ). Wówczas  $x \in A \setminus B$  lub  $y \in A \setminus B$ . Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że  $x \in A \setminus B$ . Wtedy  $\{x\} \times A \subseteq (A \times A) \Delta (B \times B)$ . Ale zbiór  $\{x\} \times A$  jest równoliczny ze zbiorem  $A$ , czyli jest nieskończony. Otrzymana sprzeczność ze skończonością zbioru  $(A \times A) \Delta (B \times B)$  kończy dowód.

8. (a)  $f[A] = \{0, 2\}$ .  
 (b)  $f^{-1}[B] = \{-2, -1, 0, 1\}$ .  
 (c) Nie. Np.  $1 \notin \text{rng}(f)$ . Gdyby bowiem istniało  $x \in \mathbb{Z}$ , takie że  $f(x) = 1$ , to równanie  $x^2 + x - 1 = 0$  miałyby rozwiązanie w liczbach całkowitych, co jest niemożliwe.  
 (d) Przykładem może być funkcja zadana wzorem

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{jeśli } x \geq 0 \\ -2x - 1 & \text{jeśli } x < 0. \end{cases}$$

Wówczas  $\text{rng}(g) = \mathbb{N}$ , a funkcja  $f \circ g$  jest różnowartościowa. Istotnie, jeśli  $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$  i  $x_1 \neq x_2$ , to  $g(x_1) \neq g(x_2)$  (gdyż, jak łatwo sprawdzić, funkcja  $g$  jest injekcją) oraz  $g(x_1), g(x_2) \geq 0$ . Zatem  $f(g(x_1)) \neq f(g(x_2))$ , gdyż funkcja  $f \upharpoonright \mathbb{N}$  jest różnowartościowa.

- (e) Nie. Ponieważ  $\text{rng}(f \circ h) \subseteq \text{rng}(f)$ , więc skoro  $\text{rng}(f) \neq \mathbb{N}$ , to tym bardziej  $\text{rng}(f \circ h) \neq \mathbb{N}$ .
9. (a)  $(f \circ f)(x^2 + 1) = f(f(x^2 + 1)) = f((x^2 + 1)^2 + 1) = f(x^4 + 2x^2 + 2) = (x^4 + 2x^2 + 2)^2 + 1 = x^8 + 4x^6 + 8x^4 + 8x^2 + 5$ .  
 (b)  $f[A] = \{x^2 + 1 : x \in [-2, 1]\} = [1, 5]$ .  
 (c)  $f^{-1}[B] = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \in (2, 3)\} = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x^2 < 2\} = (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$ .  
 (d) Ponieważ  $g_\alpha(x) = f(x - \alpha) = (x - \alpha)^2 + 1 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + 1$ , więc funkcja  $g_\alpha$ , jako funkcja kwadratowa, nie jest różnowartościowa (niezależnie od  $\alpha$ ). Zatem  $C = \emptyset$ .
10. (a) Np.  $g(n) = 1$  (lub dowolna inna niezerowa funkcja stała).

(b) Nie. Rozważmy funkcję  $h_1 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  zadaną warunkami  $h_1(2) = 1$ ,  $h_1(n) = 0$  dla  $n \neq 2$ . Wtedy  $F(h_1) = F(h) = h$ , zatem funkcja  $F$  nie jest injekcją.

(c) Załóżmy, że  $F(f) = id_{\mathbb{N}}$ . Pokażemy, że funkcja  $f$  jest różnowartościowa i „na”.

Ustalmy dowolne  $n, m \in \mathbb{N}$  takie, że  $f(n) = f(m)$ . Wówczas

$$F(f)(n) = f(f(n)) = f(f(m)) = F(f)(m),$$

czyli z założenia  $n = m$ , co kończy dowód różnowartościowości funkcji  $f$ .

Ustalmy teraz dowolne  $y \in \mathbb{N}$ . Niech  $x = f(y) \in \mathbb{N}$ . Wówczas

$$f(x) = f(f(y)) = F(f)(y) = y,$$

zatem funkcja  $f$  jest surjekcją.

(d) Dla dowolnej funkcji  $\varphi \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  zdefiniujemy funkcję  $f_{\varphi} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  wzorem

$$f_{\varphi}(n) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } n \leq 1 \\ \varphi(n-2) & \text{jeśli } n \geq 2. \end{cases}$$

Oczywiście, dla różnych funkcji  $\varphi$  otrzymujemy różne funkcje  $f_{\varphi}$ . Ponadto, jak łatwo sprawdzić,  $f_{\varphi} \circ f_{\varphi} = h$ . Wobec tego zbiór  $A = \{f_{\varphi} : \varphi \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}\}$  ma moc continuum i  $A \subseteq F^{-1}[\{h\}]$ .

11. (a) Nie. Np.  $F(\mathbb{R}^2) = F(\{0\} \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

(b) Tak. Ustalmy bowiem  $Y \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Wówczas  $\{0\} \times Y \subseteq \mathbb{R}^2$  i  $F(\{0\} \times Y) = \pi_2[\{0\} \times Y] = Y$ .

(c) Ponieważ

$$X \in F^{-1}[\{\{-1\}\}] \Leftrightarrow F(X) \in \{\{-1\}\} \Leftrightarrow \pi_2[X] = \{-1\},$$

więc

$$F^{-1}[\{\{-1\}\}] = \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \{-1\}) \setminus \{\emptyset\}.$$

(d) Tak. Zauważmy najpierw, że  $g^{-1}[\{0, 1\}] = \{-1, 0, 1\}$ . Wobec tego wystarczy wybrać podzbiór płaszczyzny  $\mathbb{R}^2$ , którego rzut na drugą oś to  $\{0, 1\}$ . Niech  $A = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ . Wówczas  $F(A) = \pi_2[\mathbb{R} \times \{0, 1\}] = \{0, 1\}$  i dalej,  $G(F(A)) = g^{-1}[\{0, 1\}] = \{-1, 0, 1\}$ , zatem  $|G \circ F(A)| = 3$ .

12. (a) Nie. Niech funkcje  $f_0, f_2 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  będą zadane wzorami  $f_0(n) = 0$  i  $f_2(n) = 2$ . Wtedy  $F(f_0) = F(f_2) = \emptyset$ .

- (b) Tak. Ustalmy dowolny podzbiór  $A \subseteq \mathbb{N}$ . Wtedy dla funkcji charakterystycznej  $\chi_A \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  zbioru  $A$  mamy  $\chi_A^{-1}[\{1\}] = A$ .
- (c) Zauważmy, że funkcja stała  $f$  albo przyjmuje wartość 1 i wtedy  $F(f) = f^{-1}[\{1\}] = \mathbb{N}$ , albo wartość różną od 1 i wtedy  $F(f) = f^{-1}[\{1\}] = \emptyset$ . Ponieważ  $F[S] = \{F(f) : f - \text{stała}\}$ , więc  $F[S] = \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ .
- (d) Oznaczmy  $C = F^{-1}[\{\{1\}\}]$ . Z definicji przeciwobrazu mamy

$$C = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : F(f) \in \{\{1\}\}\} = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f^{-1}[\{1\}] = \{1\}\},$$

zatem do zbioru  $C$  należą te funkcje, które wartość 1 przyjmują dla argumentu równego 1 i tylko wtedy.

Pokażemy, że zbiór  $C$  ma moc continuum. Ponieważ  $C \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ , więc  $|C| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$ . Z drugiej strony, dla dowolnej funkcji  $\varphi \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$  rozważmy funkcję  $f_\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  zadaną warunkami  $f_\varphi(0) = 0$ ,  $f_\varphi(1) = 1$ ,  $f_\varphi(n) = \varphi(n-2)$  dla  $n \geq 2$ . Niech  $D = \{f_\varphi : \varphi \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}\}$ . Wówczas  $|D| = |\{0, 2\}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$  oraz  $D \subseteq C$ . Wobec tego  $|C| \geq |D| = \mathfrak{c}$  i z tw. Cantora-Bernsteina wnioskujemy, że  $|C| = \mathfrak{c}$ .

13. (a) Nie. Niech funkcje  $f_1, f_2 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  będą zadane warunkami  $f_1(0) = f_2(1) = 1$ ,  $f_1(1) = f_2(0) = 0$ ,  $f_1(n) = f_2(n) = 0$  dla  $n \geq 2$ . Wówczas  $F(f_1) = F(f_2) = \{0, 1\}$ .
- (b) Nie. Ponieważ żaden z elementów  $A$  nie jest surjekcją, więc  $\mathbb{N} \notin \text{rng}(F)$  (bo zbiór  $\mathbb{N}$  nie jest obrazem żadnej funkcji  $f \in A$ ).
- (c) Ograniczoność funkcji  $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  oznacza, że ograniczony jest jej obraz. Ograniczony, czyli skończony. Z drugiej strony, każdy skończony **niepusty** podzbiór zbioru liczb naturalnych daje się zrealizować jako obraz funkcji ograniczonej (wystarczy ponumerować jego elementy, a otrzymany ciąg skończony przedłużyć do ciągu nieskończonego, powtarzając ostatnią jego wartość). Wobec tego

$$F[B] = \{D \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : 0 < |D| < \aleph_0\}.$$

- (d) Niech  $C = \{\{0, 1\}\}$ . Z definicji przeciwobrazu mamy

$$F^{-1}[C] = \{f \in A : F(f) \in \{\{0, 1\}\}\} = \{f \in A : \text{rng}(f) = \{0, 1\}\}.$$

Wobec tego  $F^{-1}[C] = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus \{h_0, h_1\}$ , gdzie  $h_0, h_1 \in A$  to funkcje stałe równe odpowiednio 0 i 1. Stąd nietrudno pokazać (wprost albo korzystając z tw. Cantora-Bernsteina), że  $|F^{-1}[C]| = \mathfrak{c}$ .

14. (a) Nie. Zauważmy, że rozważany warunek jest równoważny warunkowi  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow g[A] \cap g[B] = \emptyset$ . Ten zaś warunek nie musi być spełniony, gdy funkcja nie jest różnowartościowa. W szczególności dla  $A = \{0\}$  i  $B = \{2\}$  mamy  $g[A] = g[B] = \{2\}$ , czyli  $A \cap B = \emptyset$  i  $g[A] \cap g[B] \neq \emptyset$ .
- (b) Nie. Niech funkcja  $k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  będzie zadana wzorem

$$k(n) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } 2|n \\ 1 & \text{jeśli } \neg 2|n. \end{cases}$$

Wówczas  $F(k) = F(h) = h$ .

- (c) Nie. Istotnie,  $g \in F^{-1}[\{f\}] \Leftrightarrow F(g) = f$ , a wiemy, że

$$F(g)(0) = g(f(0)) = g(0) = 2 \neq 0 = f(0).$$

Zatem  $F(g) \neq f$ .

- (d) Oznaczmy  $C = F^{-1}[\{h\}]$ . Z definicji przeciwobrazu wnioskujemy, że

$$C = \{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : F(\varphi) = h\} = \{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : (\forall n \in \mathbb{N})\varphi(2n) = 0\}.$$

Pokażemy, że  $C \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ . W tym celu zdefiniujemy funkcję  $G : C \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  warunkiem

$$G(\varphi)(n) = \varphi(2n + 1) \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

i uzasadnimy, że jest ona bijekcją.

Ustalmy  $\varphi_1, \varphi_2 \in C$ ,  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ . Wówczas istnieje liczba nieparzysta  $n \in \mathbb{N}$ , taka że  $\varphi_1(n) \neq \varphi_2(n)$  (liczba ta nie może być parzysta, bo dla liczb parzystych obie funkcje  $\varphi_1, \varphi_2$  przyjmują wartość 0). Niech  $n = 2m + 1$  dla pewnego  $m \in \mathbb{N}$ . Wtedy  $G(\varphi_1)(m) \neq G(\varphi_2)(m)$ , czyli  $G(\varphi_1) \neq G(\varphi_2)$ . Zatem funkcja  $G$  jest injekcją. Ustalmy teraz  $\psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ . Definiujemy funkcję  $\varphi_\psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  wzorem

$$\varphi_\psi(n) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } 2|n \\ \psi(\frac{n-1}{2}) & \text{jeśli } \neg 2|n. \end{cases}$$

Wówczas  $\varphi_\psi \in C$  oraz  $G(\varphi_\psi) = \psi$  (co sprawdza się prostym rachunkiem), czyli funkcja  $G$  jest surjekcją.

Wobec tego  $|C| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$ .

15. (a) Nie istnieje. Przypuśćmy bowiem, że taka funkcja  $f$  istnieje. Zauważmy, że jeśli dla pewnego  $x \in X$  mamy  $f(x) = y \in X$ , to  $f(y) = f(f(x)) = x$ . Ponieważ z założenia  $x \neq y$ , więc funkcja  $f$  łączy elementy zbioru  $X$  w pary. Ale zbiór  $X$  ma nieparzystą liczbę elementów, sprzeczność.
- (b) Przypuśćmy nie wprost, że na zbiorze  $X$  istnieje porządek  $\preceq$  taki, że  $(\forall x \in X) x \preceq g(x)$ . Wówczas w szczególności mamy  $0 \preceq g(0) = 2$  i  $2 \preceq g(2) = 0$ . Ze słabej antysymetrii relacji  $\preceq$  wynika, że  $0 = 2$ . Otrzymana sprzeczność kończy dowód.
- (c) (i) Ponieważ

$$\langle x, y \rangle \in h^{-1}[\{\langle 3, 2 \rangle\}] \Leftrightarrow \langle x, x + y \rangle = \langle 3, 2 \rangle \Leftrightarrow x = 3 \wedge x + y = 2,$$

więc  $y < 0$ , co pozostaje w sprzeczności z  $y \in \mathbb{N}$ . Wobec tego  $h^{-1}[\{\langle 3, 2 \rangle\}] = \emptyset$ .

(ii) Zauważmy, że  $\{0\} \times \mathbb{N} \subseteq \text{rng}(h) \subseteq \mathbb{N}^2$ . Wobec tego

$$\aleph_0 = |\{0\} \times \mathbb{N}| \leq |\text{rng}(h)| \leq |\mathbb{N}^2| = \aleph_0,$$

zatem z tw. Cantora-Bernsteina wynika, że  $|\text{rng}(h)| = \aleph_0$ .

16. (a) Relacja  $R$  jest relacją równoważności, gdyż jest  
zwrotna: dla dowolnego  $x \in A$  mamy  $x^2 - x^2 = 0 = 5 \cdot 0$ , zatem  $xRx$ ;  
symetryczna: dla dowolnych  $x, y \in A$ , jeśli  $xRy$ , czyli  $x^2 - y^2 = 5k$  dla pewnego  $k \in \mathbb{Z}$ , to  $y^2 - x^2 = 5 \cdot (-k)$  i  $-k \in \mathbb{Z}$ , zatem  $yRx$ ;  
przechodnia: dla dowolnych  $x, y, z \in A$ , jeśli  $xRy$  i  $yRz$ , czyli  $x^2 - y^2 = 5k$  i  $y^2 - z^2 = 5l$  dla pewnych  $k, l \in \mathbb{Z}$ , to  $x^2 - z^2 = (x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) = 5(k + l)$  i  $k + l \in \mathbb{Z}$ , zatem  $xRz$ .  
Relacja  $S$  nie jest relacją równoważności, gdyż nie jest przechodnia. Istotnie, wprawdzie  $2S1$  i  $1S4$ , ale  $\neg 2S4$ .
- (b)  $[2]_R = \{2, 3, 7, 8\}$ .
- (c) Ponieważ  $A/R = \{X_0, X_1, X_2\}$ , gdzie  $X_0 = \{0, 5, 10\}$ ,  $X_1 = \{1, 4, 6, 9\}$ ,  $X_2 = \{2, 3, 7, 8\}$ , więc  $|A/R| = 3$ . Można też zauważyć, że wyabstrahowaną cechą liczby ze zbioru  $A$  jest reszta jej kwadratu w dzieleniu przez 5, a cecha ta może przyjmować dokładnie trzy wartości: 0, 1 i 4.
- (d) Tak. Ponieważ  $S = A^2 \setminus \{\langle 1, 8 \rangle, \langle 8, 1 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$  i pary nienależące do  $S$  nie należą również do  $R$  (co łatwo sprawdzić, znając zbiór ilorazowy relacji  $R$ ), więc  $R \subseteq S$ . Wobec tego  $R \cap S = R$ , a

$R$  jest relacją równoważności.

Można też sprawdzić z definicji, że relacja  $R \cap S$  jest relacją równoważności – jest to rozwiązanie bardziej żmudne, a sprawdzając przechodność tej relacji wykonujemy *de facto* to samo rozumowanie, co powyżej.

17. (a) Tak. Istotnie, jedynymi dzielnikami liczb 12 i 18 są liczby 2 i 3, zatem obie rozważane liczby mają te same dzielniki ze zbioru  $I$ . Wobec tego  $12 R 18$ , czyli  $12 \in [18]_R$ .
- (b) Nie. Istotnie, liczba 1 nie ma dzielnika ze zbioru  $I$ , a liczba 3 ma dzielnik ze zbioru  $I$ . Wobec tego  $\neg 1 R 3$ , co oznacza, że zbiór  $\{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$  (do którego obie te liczby należą) nie może być klasą abstrakcji relacji  $R$ .
- (c) Nie. Ponieważ relacja  $R$  jest zwrotna i przechodnia, więc  $R \circ R = R$ . Relacja  $R$  nie może zaś być spójna, gdyż miałaby wtedy tylko jedną klasę abstrakcji (co, jak wiemy np. z a), nie ma miejsca). Można też (mniej elegancko) pokazać wprost z definicji złożenia relacji, że liczby np. 1 i 2 nie są porównywalne w sensie relacji  $R \circ R$ .
- (d) Ponieważ dwie liczby naturalne dodatnie są w relacji  $R$  dokładnie wtedy, gdy mają te same dzielniki ze zbioru  $I$ , więc cechą liczby naturalnej, wyabstrahowaną przy pomocy relacji  $R$ , jest zbiór tych jej dzielników, które należą do zbioru  $I$ . Możliwe wartości tej cechy to podzbiory zbioru  $I$  (każdej klasie abstrakcji odpowiada zbiór tych liczb ze zbioru  $I$ , które dzielą wszystkie elementy tej klasy). Wobec tego

$$|\mathbb{N}^+ /_R| = |\mathcal{P}(I)| = 16.$$

18. (a) Ponieważ funkcja  $\varphi$  nie jest nigdzie większa od zera, więc z definicji relacji  $R_0$  wynika, że w relacji z nią są funkcje z  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ , które również nigdzie nie są większe od zera. Ale innych takich funkcji nie ma, zatem  $[\varphi]_{R_0} = \{\varphi\}$ .
- (b) Zauważmy, iż z definicji relacji  $R_1$  wynika, że

$$\begin{aligned} [\varphi]_{R_1} &= \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : (\forall n \in \mathbb{N})(f(n) > 1 \Leftrightarrow 0 > 1)\} = \\ &= \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : (\forall n \in \mathbb{N})(f(n) \leq 1)\}. \end{aligned}$$

Wobec tego  $[\varphi]_{R_1} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , skąd od razu otrzymujemy  $||[\varphi]_{R_1}| = \mathfrak{c}$ .

- (c) Nie. Z definicji złożenia relacji wynika, że  $\psi R_1 \circ R_2 \varphi$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja  $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ , taka że  $\psi R_2 f$  i  $f R_1 \varphi$ .

Ale wiemy już z b), że  $f R_1 \varphi \Leftrightarrow f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Z drugiej strony, jeśli  $\psi R_2 f$ , to w szczególności dla  $k \geq 3$  mamy  $f(k) > 2$  (bo  $\psi(k) > 2$ ), co pozostaje w sprzeczności z faktem  $f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Wobec tego poszukiwana funkcja  $f$  nie istnieje, zatem funkcja  $\psi$  nie może być w relacji  $R_1 \circ R_2$  z funkcją  $\varphi$ .

- (d) Zauważmy, że cechą funkcji  $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ , wyabstrahowaną przy pomocy relacji  $R_1$ , jest podzbiór zbioru  $\mathbb{N}$ , na którym przekracza ona wartość 1. Możliwe wartości tej cechy to podzbiory zbioru  $\mathbb{N}$  (każdej klasie abstrakcji odpowiada podzbiór zbioru  $\mathbb{N}$ , na którym wszystkie funkcje z tej klasy są większe od 1). Wobec tego

$$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{R_1}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}.$$

Można, wykorzystując powyższe spostrzeżenie (choć do rozwiązania zadania nie jest to niezbędne), opisać zbiór ilorazowy relacji  $R_1$ :

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{R_1} = \{F_A : A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\},$$

gdzie  $F_A = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : (\forall n \in \mathbb{N}) f(n) > 1 \Leftrightarrow n \in A\}$ .

Inny sposób rozwiązania tego zadania jest bardziej „rachunkowy”. Wprost z własności relacji równoważności wynika, że

$$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{R_1}| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$$

(istotnie, dla dowolnej relacji równoważności na zbiorze  $X$  nie może mieć ona więcej klas abstrakcji niż  $|X|$ , gdyż klasy abstrakcji są niepuste i rozłączne). Z drugiej strony, odwzorowanie  $F : \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{R_1}$  zadane wzorem  $F(f) = [f]_{R_1}$  jest injekcją (innymi słowy, zbiór  $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$  jest zbiorem elementów parami nieporównywalnych względem relacji  $R_1$ ). Faktycznie, jeśli  $f_1, f_2 \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$  i  $f_1 \neq f_2$ , to dla pewnego  $k \in \mathbb{N}$  mamy (bez zmniejszenia ogólności)  $f_1(k) = 0$  i  $f_2(k) = 2$ . Ale wówczas dla tego  $k$  mamy  $\neg(f_1(k) > 1 \Leftrightarrow f_2(k) > 1)$ , zatem  $\neg f_1 R_1 f_2$  i dalej  $[f_1]_{R_1} \neq [f_2]_{R_1}$ , co należało dowieść.

Różnowartościowość funkcji  $F$  oznacza, że

$$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{R_1}| \geq |\{0, 2\}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$$

i z tw. Cantora-Bernsteina wnioskujemy, że  $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{R_1}| = \mathfrak{c}$ .

19. (a) Tak. Ustalmy bowiem dowolne  $z \in \mathbb{Z}$ . Wtedy  $\langle 0, -z \rangle \in \mathbb{Z}^2$  oraz  $f(0, -z) = 0^2 - (-z) = z$ .

(b) Z definicji klasy abstrakcji mamy

$$[\langle 0, 0 \rangle]_R = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}^2 : f(x, y) = f(0, 0) = 0 \},$$

$$\text{czyli } [\langle 0, 0 \rangle]_R = \{ \langle x, x^2 \rangle : x \in \mathbb{Z} \}.$$

(c) Z definicji obrazu funkcji mamy

$$f [[\langle 2, -3 \rangle]_R] = \{ f(x, y) : \langle x, y \rangle \in [\langle 2, -3 \rangle]_R \}.$$

Ponieważ dla każdego  $\langle x, y \rangle \in [\langle 2, -3 \rangle]_R$  mamy  $f(x, y) = f(2, -3) = 7$ , więc  $f [[\langle 2, -3 \rangle]_R] = \{7\}$ .

(d) Funkcja  $f \upharpoonright A$  jest różnowartościowa. Gdyby bowiem istniały dwie różne pary  $\langle x, y \rangle, \langle a, b \rangle \in A$  takie, że  $f(x, y) = f(a, b)$ , to obie należałyby do tej samej klasy abstrakcji, wbrew założeniu o zbiorze  $A$ .

Funkcja  $f \upharpoonright A$  może, ale nie musi być „na”. Jeśli bowiem istnieje klasa abstrakcji  $[\langle x, y \rangle]_R$  rozłączna ze zbiorem  $A$  (czego założenie nie wyklucza), to wartość  $f(x, y)$  nie należy do obrazu funkcji  $f \upharpoonright A$ . Z drugiej strony, jeśli zbiór  $A$  z każdą klasą abstrakcji relacji  $R$  ma dokładnie jeden wspólny element, to z faktu, że funkcja  $f$  jest surjekcją wynika, że funkcja  $f \upharpoonright A$  również jest surjekcją (istotnie, dla dowolnego  $z \in \mathbb{Z}$  istnieje  $\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}^2$  takie, że  $f(x, y) = z$ . Niech  $\langle a, b \rangle \in [\langle x, y \rangle]_R \cap A$ . Wtedy  $\langle a, b \rangle \in A$  i  $(f \upharpoonright A)(a, b) = f(x, y) = z$ ).

(e) Badamy, ile różnych wartości przyjmuje funkcja  $f$  na zbiorze  $\{0, 1, 2\}^2$ . Ponieważ  $f(0, 0) = f(1, 1) = 0$ ,  $f(0, 1) = f(1, 2) = -1$ ,  $f(0, 2) = -2$ ,  $f(1, 0) = 1$ ,  $f(2, 0) = 4$ ,  $f(2, 1) = 3$ ,  $f(2, 2) = 2$ , więc

$$|X^2 /_{R} X^2| = 7.$$

20. (a) Nie. Istotnie,  $\pi_1[C] = \mathbb{R} \setminus \{0\} \neq \mathbb{R} = \pi_1[\mathbb{R}^2]$ , czyli  $\neg C R \mathbb{R}^2$ .

(b) Np.  $D = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ .

(c) Z definicji klasy abstrakcji mamy

$$[\{\langle 0, 0 \rangle\}]_R = \{A \subseteq \mathbb{R}^2 : \pi_1[A] = \pi_1[\{\langle 0, 0 \rangle\}] = \{0\}\}.$$

Wobec tego  $[\{\langle 0, 0 \rangle\}]_R = \mathcal{P}(\{0\} \times \mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}$ .

(d) Nie. Zauważmy, że  $F \in [E \times \mathbb{N}]_R$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\pi_1[F] = E$ . Z drugiej strony wiemy, że  $|\pi_1[F]| \leq |F|$ , skąd wnioskujemy, że  $|F| \leq |E| > \aleph_0$ .

21. (a) Niech ciąg  $\langle d_n : n \in \mathbb{N} \rangle$  będzie zadany warunkami  $d_0 = 0$ ,  $d_n = 1$  dla  $n \geq 1$ . Wówczas  $\langle d_n : n \in \mathbb{N} \rangle T \langle c_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ , czyli  $[\langle c_n : n \in \mathbb{N} \rangle]_T = [\langle d_n : n \in \mathbb{N} \rangle]_T$ .
- (b) Zauważmy, że cechą ciągu liczb naturalnych, wyabstrahowaną przy pomocy relacji  $T$ , jest jego pierwszy wyraz. Zatem klasy abstrakcji relacji  $T$  są wyznaczane przez możliwe wartości tej cechy, czyli przez liczby naturalne. Wobec tego

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/T = \{A_k : k \in \mathbb{N}\},$$

gdzie  $A_k = \{\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : a_0 = k\}$ .

- (c) Wprost z (b) otrzymujemy  $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/T| = \aleph_0$ . Istotnie, sprawdzenie, że funkcja  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/T$ , zadana wzorem  $f(k) = A_k$  jest bijekcją nie powinno nastęrczać większych problemów.
- (d) Niech  $\varphi : [\langle c_n : n \in \mathbb{N} \rangle]_T \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  będzie funkcją zadaną wzorem

$$\varphi(\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle) = \langle a_{n+1} : n \in \mathbb{N} \rangle.$$

Funkcja  $\varphi$  jest injekcją, gdyż jeśli dwa ciągi  $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ ,  $\langle b_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ , należące do  $[\langle c_n : n \in \mathbb{N} \rangle]_T$  różnią się  $m$ -tym wyrazem, to  $m > 0$  (bo  $a_0 = b_0$ ), zatem ciągi  $\langle a_{n+1} : n \in \mathbb{N} \rangle$ ,  $\langle b_{n+1} : n \in \mathbb{N} \rangle$  będą różnić się tym samym wyrazem.

Funkcja  $\varphi$  jest też surjekcją. Istotnie, ustalmy dowolny ciąg  $\langle e_n : n \in \mathbb{N} \rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ . Wówczas ciąg  $\langle f_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ , zadany warunkami  $f_0 = c_0$ ,  $f_n = e_{n-1}$  dla  $n \geq 1$  należy do  $[\langle c_n : n \in \mathbb{N} \rangle]_T$  i

$$\varphi(\langle f_n : n \in \mathbb{N} \rangle) = \langle e_n : n \in \mathbb{N} \rangle.$$

Zatem  $[\langle c_n : n \in \mathbb{N} \rangle]_T \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ , czyli  $|[\langle c_n : n \in \mathbb{N} \rangle]_T| = \mathfrak{c}$ .

Warto zauważyć, że w istocie w powyższym dowodzie nie korzystaliśmy z definicji ciągu  $\langle c_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ . Wobec tego pokazaliśmy, że **każda** klasa abstrakcji relacji  $T$  ma moc continuum.

22. (a) Nie. Gdyby  $\{1, 2, 4\} + x = \{5, 7, 8\}$  dla pewnego  $x \in \mathbb{Z}$ , to  $1 + x = 5$  i  $2 + x = 7$  (przesunięcie zachowuje porządek elementów w zbiorze), skąd  $x = 6$  i  $x = 5$ , sprzeczność.
- (b) Tak. Ta klasa to  $\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4\}$ , gdzie  $A_i = \{5k + i : k \in \mathbb{Z}\}$  (dla  $i = 0, \dots, 4$ ).
- (c) Zauważmy, że dowolne dwa zbiory jednoelementowe są ze sobą w relacji (dla  $\{a\}, \{b\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$  mamy  $\{a\} + (b - a) = \{b\}$ ). Wobec tego wszystkie singletony są w tej samej klasie abstrakcji, czyli

$$|\{\mathcal{A} \in (\mathcal{P}(\mathbb{Z}))/R : (\forall B \in \mathcal{A})|B| = 1\}| = 1.$$

- (d) Ponieważ dwuelementowych podzbiorów zbioru liczb całkowitych jest przeliczalnie wiele, więc klas abstrakcji relacji  $R$ , które składają się z takich zbiorów jest co najwyżej przeliczalnie wiele. By zakończyć dowód wystarczy zatem pokazać, że jest nieskończenie wiele parami nierównoważnych dwuelementowych podzbiorów zbioru liczb całkowitych (bo każdy z nich będzie wyznaczał inną klasę abstrakcji relacji  $R$ ). By to zrobić zauważmy, że dwa dwuelementowe zbiorów są ze sobą w relacji dokładnie wtedy, gdy ich elementy są od siebie równoodległe, czyli

$$\{a, b\} R \{c, d\} \Leftrightarrow |a - b| = |c - d|.$$

Wobec tego rodzina  $\{\{0, n\} : n \in \mathbb{N}^+\}$  jest nieskończoną rodziną parami nierównoważnych dwuelementowych podzbiorów zbioru liczb całkowitych.

- (e) Mamy (por. rozwiązanie zadania 18(d))

$$|\mathcal{P}(\mathbb{Z})/R| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Z})| = \mathfrak{c}.$$

Rozważmy teraz rodzinę  $\mathcal{A} = \{\{0\} \cup A : A \subseteq \mathbb{N}^+\}$ . Oczywiście  $|\mathcal{A}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)| = \mathfrak{c}$ . Ponadto, ponieważ przesunięcie zachowuje porządek elementów w zbiorze, więc elementy rodziny  $\mathcal{A}$  są parami nierównoważne (względem relacji  $R$ ) – wszystkie mają ten sam najmniejszy element, zatem żadne niezerowe przesunięcie nie może przeprowadzać jednego z nich na drugi. Wobec tego funkcja  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z})/R$  zadana wzorem  $f(B) = [B]_R$  jest iniekcją. Zatem

$$|\mathcal{P}(\mathbb{Z})/R| \geq |\mathcal{A}| = \mathfrak{c}.$$

Na mocy tw. Cantora-Bernsteina otrzymujemy  $|\mathcal{P}(\mathbb{Z})/R| = \mathfrak{c}$ .

23. (a) Nie. Ponieważ  $f(0) = -1 < 0$  i  $g(0) = 0$ , więc  $\neg f R g$ , czyli  $[f]_R \neq [g]_R$ .
- (b) Mamy

$$\varphi \in [h]_R \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(\varphi(n) \geq 0 \Leftrightarrow (-1)^n \geq 0),$$

zatem

$$[h]_R = \{\varphi \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} : (\forall n \in \mathbb{N})\varphi(2n) \geq 0 \wedge \varphi(2n+1) < 0\}.$$

(c) Szukanym zbiorem maksymalnej mocy może być np. zbiór

$$A = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}.$$

Jeśli bowiem  $f, g \in A$  są takie, że  $f \neq g$ , to istnieje  $n \in \mathbb{N}$  takie, że  $f(n) \neq g(n)$ . Ale to oznacza, że wartości  $f(n)$  i  $g(n)$  są różnych znaków, czyli  $\neg f R g$ .

24. (a) Nie. Ponieważ  $\{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}, \{1\} \not\subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ , więc

$$\{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\} R \{1\} \Leftrightarrow \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{N} = \{1\} \cap \mathbb{N},$$

co, oczywiście, nie ma miejsca.

(b) Wystarczy zauważyć, że jeśli  $C \subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ , to  $[C]_R = \{C\}$ . Zatem np. dla  $C = \{-1\}$  mamy  $|[C]_R| = 1 < \aleph_0$ .

(c) Ponieważ

$$\{x \in \mathbb{Z} : |x + 1| \leq 1\} = \{-2, -1, 0\} \not\subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N},$$

więc

$$D \in [\{x \in \mathbb{Z} : |x + 1| \leq 1\}]_R \Leftrightarrow D \cap \mathbb{N} = \{-2, -1, 0\} \cap \mathbb{N} = \{0\}.$$

Zatem np.  $D = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^+$ .

(d) Ponieważ  $A R \mathbb{Z} \Leftrightarrow A \cap \mathbb{N} = \mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$ , więc

$$[\mathbb{Z}]_R = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) : \mathbb{N} \subseteq A\}.$$

Zauważmy teraz, że

$$\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) : \mathbb{N} \subseteq A\} = \{\mathbb{N} \cup B : B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})\}.$$

Określmy funkcję  $f : \mathcal{P}(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \rightarrow \{\mathbb{N} \cup B : B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})\}$  wzorem  $f(B) = \mathbb{N} \cup B$ . W prosty sposób możemy sprawdzić, że jest ona bijekcją. Wobec tego

$$|[\mathbb{Z}]_R| = |\mathcal{P}(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}.$$

(e) Z jednej strony wiemy (por. rozwiązanie zadania 18(d)), że

$$|\mathcal{P}(\mathbb{Z})/R| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Z})| = \mathfrak{c}.$$

Z drugiej strony zauważmy, że jeśli  $A, B \subseteq \mathbb{N}$  i  $A \neq B$ , to  $\neg A R B$  (bo  $A \cap \mathbb{N} = A \neq B = B \cap \mathbb{N}$ ). Wobec tego różne podzbiory

zbioru liczb naturalnych wyznaczają różne klasy abstrakcji relacji  $R$  (dokładniej: funkcja  $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z})/R$  zadana wzorem  $f(A) = [A]_R$  jest injekcją), czyli

$$|\mathcal{P}(\mathbb{Z})/R| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}.$$

Na mocy tw. Cantora-Bernsteina otrzymujemy  $|\mathcal{P}(\mathbb{Z})/R| = \mathfrak{c}$ .

25. (a) Ponieważ  $[\emptyset]_R = \{A \in \mathcal{P}(X) : f[A] = f[\emptyset] = \emptyset\}$ , więc  $[\emptyset]_R = \{\emptyset\}$  (bo żaden niepusty zbiór nie może mieć pustego obrazu).
- (b) Tak. Pytamy bowiem, czy istnieje zbiór  $A \subseteq X$  taki, że  $\{3, 6\} R A$  i  $A S \{4\}$ , czyli taki, że

$$f[A] = f[\{3, 6\}] = \{3, 4\} \text{ i } f^{-1}[A] \subseteq f^{-1}[\{4\}] = \{6\}.$$

Drugi z tych warunków oznacza, że  $A \subseteq \{4, 5, 6\}$ . Ponieważ dla  $A = \{4, 6\}$  spełniony jest także pierwszy warunek, więc odpowiedź na nasze pytanie jest pozytywna.

- (c) Zauważmy, że cechą podzbioru zbioru  $X$ , wyabstrahowaną przy pomocy relacji  $R$ , jest jego obraz przez funkcję  $f$ . Ponieważ  $\text{rng}(f) = \{1, 2, 3, 4\}$ , więc wartości wyabstrahowanej cechy to podzbiory zbioru  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Wobec tego

$$|\mathcal{P}(X)/R| = |\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})| = 16.$$

Inną metodą rozwiązania tego zadania może być opisanie zbioru  $\mathcal{P}(X)/R$ . Należy jednak uważać – przy opisywaniu tego zbioru „na piechotę” (poprzez wypisanie i pogrupowanie wszystkich podzbiorów zbioru  $X$ ) bardzo łatwo się pomylić. Dlatego lepiej wykorzystać taki opis:

$$\mathcal{P}(X)/R = \{\mathcal{A}_D : D \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})\},$$

gdzie  $\mathcal{A}_D = \{A \subseteq X : f[A] = D\}$  (co jednak w gruncie rzeczy jest tylko lekką modyfikacją pierwszej metody rozwiązania).

- (d) Łatwo możemy sprawdzić, korzystając z własności przeciwobrazu, że relacja  $S$  (zatem także każde jej obcięcie) jest relacją zwrotną i przechodnią. Wobec tego musimy znaleźć największy (w sensie zawierania) zbiór  $C \subseteq X$ , dla którego relacja  $S \upharpoonright C$  jest słabo antysymetryczna (bo tylko tej własności relacji porządku brakuje relacji  $S$ ). Przypuśćmy, że dla pewnych zbiorów  $A, B \subseteq X$  zachodzi  $A S B$  i  $B S A$ , czyli

$$f^{-1}[A] \subseteq f^{-1}[B] \text{ i } f^{-1}[B] \subseteq f^{-1}[A].$$

Zatem  $f^{-1}[A] = f^{-1}[B]$ . Stąd  $f[f^{-1}[A]] = f[f^{-1}[B]]$ , czyli  $A \cap \text{rng}(f) = B \cap \text{rng}(f)$ . Z równości tej wynika równość zbiorów  $A$  i  $B$  pod warunkiem, że  $A, B \subseteq \text{rng}(f)$ . Wobec tego

$$C = \text{rng}(f) = \{1, 2, 3, 4\}.$$

26. (a) Tak. Dwa przedziały są nieporównywalne, gdy jeden zawiera się w drugim i mają oba końce różne, zatem przykładem może być np.  $J = (-1, 3)$ .
- (b) Przykładem antyłańcucha może być np. zbiór  $\mathcal{A} = \{(-a, a) : a \in (0, +\infty)\}$ .
- (c) Przykładem łańcucha może być np. zbiór  $\mathcal{L} = \{(0, n) : n \in \mathbb{N}\}$ .
- (d) Nie. Istotnie, jeśli  $(a, b) \in A$ , to  $(\frac{a+b}{2}, 1) \in A$  i  $(a, b) \prec (\frac{a+b}{2}, 1)$ .
27. (a) Nie. Zauważmy bowiem, że  $x \leq_1 y \Leftrightarrow y \leq x$  (czyli  $\leq_1$  jest po prostu odwróconym porządkiem na zbiorze  $\mathbb{R}$ ). Zatem  $\pi <_1 3$ .
- (b) Tak. Ponieważ standardowy porządek na zbiorze liczb rzeczywistych jest liniowy, więc po odwróceniu pozostanie liniowy.
- (c) Np.  $B = (2, 3)$ .
- (d) Tak. Istotnie, ustalmy dowolne  $x, y \in \mathbb{N}$ . Mamy

$$\begin{aligned} x \leq_2 y &\Leftrightarrow x \leq_1 y \Leftrightarrow (\forall z \in \mathbb{R})(x < z \Rightarrow y < z) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\forall z \in \mathbb{N})(x < z \Rightarrow y < z). \end{aligned}$$

Z drugiej strony, gdyby  $(\forall z \in \mathbb{N})(x < z \Rightarrow y < z)$ , ale istniałoby  $t \in \mathbb{R}$ , takie że  $x < t$  i  $t \leq y$ , to  $x < y$  i otrzymujemy sprzeczność z założeniem dla  $z = y$ .

28. (a) Np.  $\{\langle n, 0 \rangle : n \in \mathbb{N}\}$ , albo opisany w (b) zbiór elementów minimalnych (kluczowe jest dostrzeżenie różnicy pomiędzy porządkiem  $\preceq$  a zwykłym porządkiem produktowym).
- (b)  $\{\langle n, 0 \rangle : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle 0, n \rangle : n \in \mathbb{N}\}$ .
- (c) Nie. Przypuśćmy bowiem, że taki nieskończony łańcuch  $L$  istnieje. Ponieważ rzut  $\pi[L]$  jest zbiorem skończonym, więc istnieje  $x_0 \in \pi[L]$ , takie że zbiór  $A = \{\langle x, y \rangle \in L : x = x_0\}$  jest nieskończony (wynika to z zasady szufladkowej – w przeciwnym przypadku zbiór  $L$  byłby skończony). Ale zbiór  $A \subseteq L$  jest antyłańcuchem, sprzeczność.

29. (a) Nie. Gdyby  $(0, 1) \prec (a, b) \prec (1, 2)$ , to ponieważ z definicji relacji  $\preceq$  wynika, że  $I \prec J \Leftrightarrow \sup I \leq \inf J$ , więc mielibyśmy  $1 \leq a$  i  $b \leq 1$ , co jest sprzeczne z założeniem, że  $a < b$ .
- (b) Nie. Wystarczy zauważyć, że każdy odcinek  $(a, 1)$ , gdzie  $a < 1$ , jest elementem maksymalnym w  $\mathcal{P}((-\infty, 1)) \cap X$ .
- (c) Ponieważ dwa odcinki są nieporównywalne dokładnie wtedy, gdy nie są rozłączne, więc w szukanym antyłańcuchu każde dwa odcinki muszą mieć niepusty przekrój. Warunek  $\bigcap_{I \in \mathcal{A}} I = \emptyset$  najprościej osiągnąć rozważając rodzinę zstępującą (względem zawierania). Przykładowa odpowiedź to

$$\mathcal{A} = \left\{ \left( 0, \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

- (d) Nie. Ponieważ porównywalność dwóch różnych odcinków oznacza ich rozłączność, więc istnienie nieprzeliczalnego łańcucha oznaczałoby istnienie nieprzeliczalnej rodziny parami rozłącznych odcinków na prostej, co, jak wiadomo, jest niemożliwe.
30. (a) Nie. Gdyby  $2 \preceq 12$ , to istniałaby liczba naturalna  $k$ , taka że  $12 = 2^{k+1}$ , co nie jest możliwe.
- (b) Nie. Wystarczy pokazać, że dla dowolnego  $x \in \mathbb{N}^+$  potrafimy wskazać  $y \in \mathbb{N}^+$  takie, że  $x \prec y$ . Ustalmy zatem  $x \in \mathbb{N}^+$ . Jeśli  $\neg 2|x$ , to  $\neg 2|(x+2)$  i  $x \leq x+2$ , zatem  $x \prec x+2$ . Jeśli natomiast  $2|x$ , to  $2|2x$  i  $2x = 2^1 \cdot x$ , zatem  $x \prec 2x$ , co kończy dowód.
- (c) Niech  $Odd$  będzie zbiorem liczb nieparzystych. Wówczas zbiór  $\{2x : x \in Odd\}$  jest przykładem szukanego antyłańcucha.
- (d) Nie. Wynika to z faktu, że zbiór  $\mathbb{N}^+$  jest sumą parami rozłącznych łańcuchów:

$$\mathbb{N}^+ = Odd \cup \bigcup_{n \in Odd} \{2^k n : k \in \mathbb{N}\}.$$

Nie istnieją zatem dwa różne elementy, mające ten sam bezpośredni następnik.

31. (a) Nie, ponieważ  $7 \prec 9 \Leftrightarrow f^{-1}(7) \leq f^{-1}(9) \Leftrightarrow -4 \leq -5$ .
- (b) Nie. Zbiór uporządkowany  $\langle \mathbb{N}, \preceq \rangle$  jest izomorficzny ze zbiorem uporządkowanym  $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$  (funkcja  $f$  jest izomorfizmem). Wobec tego porządek  $\preceq$  jest liniowy (bo porządek  $\leq$  jest), co oznacza, że nie ma dwóch nieporównywalnych elementów (a różne elementy maksymalne są nieporównywalne).

(c) Np.  $\{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\} \cup \{4\}$ .

(d) Skorzystamy z własności  $(g \circ f)^{-1}[C] = f^{-1}[g^{-1}[C]]$ . Mamy

$$\begin{aligned} g^{-1}[C] &= \{n \in \mathbb{N} : g(n) \in C\} = \{n \in \mathbb{N} : f(n) \in C\} = \\ &= \{n \in \mathbb{N} : 2n \in C\} = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 50\}. \end{aligned}$$

Dalej mamy

$$f^{-1}[\{n \in \mathbb{N} : n \leq 50\}] = \{k \in \mathbb{Z} : f(k) \leq 50\}.$$

Stąd otrzymujemy  $(g \circ f)^{-1}[C] = \{k \in \mathbb{Z} : |k| \leq 25\}$ .

32. (a) (i)

(ii)  $\sup A = \langle 12, 2 \rangle$ .

(b) Nie. Dla dowolnej pary  $\langle a, b \rangle \in (\mathbb{N}^+)^2$  mamy bowiem  $\langle a, b \rangle \prec \langle 2a, b \rangle$ .

(c) Np.  $\{\langle 2, 2 \rangle\} \cup \{\langle 2^k, 1 \rangle : k \in \mathbb{N}^+\}$ .

33. (a) Elementem najmniejszym (i w związku z tym jedynym elementem minimalnym) jest funkcja stała, zadana wzorem  $f(n) = 0$ . Element maksymalny (a zatem również element największy) nie istnieje, ponieważ dla dowolnej funkcji  $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  możemy zdefiniować funkcję  $\psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  wzorem  $\psi(n) = \varphi(n) + 1$ . Wówczas mamy  $(\forall n \in \mathbb{N})(\varphi(n) < \psi(n))$ , skąd wnioskujemy, że  $\varphi \prec \psi$ .

(b) Najprościej wziąć funkcje stałe. Jeśli zatem funkcję  $f_a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  zadamy wzorem  $f_a(n) = a$ , to szukanym łańcuchem może być zbiór  $L = \{f_a : a \in \mathbb{N}\}$ .

(c) Przyjmijmy oznaczenie  $A = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f \preceq h\}$ . Wówczas  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \subseteq A$ . Istotnie, ponieważ  $(\forall n \in \mathbb{N})h(n) \geq 1$ , więc dla każdej funkcji

$g \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  mamy  $(\forall n \in \mathbb{N})h(n) \geq g(n)$ , czyli  $g \preceq h$ . Ponadto  $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ . Wobec tego mamy

$$\mathfrak{c} = |\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| \leq |A| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$$

i z tw. Cantora-Bernsteina wnioskujemy, że  $|A| = \mathfrak{c}$ .

34. (a) Tak. Np.  $\frac{10}{3} \prec \frac{2}{5} \prec \frac{5}{2}$ .
- (b) Nie. Ponieważ dwie liczby o tej samej części ułamkowej są nieporównywalne, więc w szczególności zbiór  $\mathbb{Z}$  jest zbiorem elementów minimalnych.
- (c) Ponieważ elementy maksymalne muszą mieć tę samą część ułamkową, więc wybieramy dwie liczby o niezerowej części ułamkowej i dorzucamy sporo liczb o mniejszych częściach ułamkowych, otrzymując np.  $\mathbb{Z} \cup \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$ .
- (d) Nie. Zauważmy bowiem, że dwie liczby są nieporównywalne wtedy i tylko wtedy, gdy mają tę samą część ułamkową. Tymczasem dla ustalonej liczby  $a \in [0, 1)$  zbiór tych liczb rzeczywistych, które mają część ułamkową równą  $a$ , ma postać  $\{n + a : n \in \mathbb{Z}\}$  i jest przeliczalny.
35. (a) Punkty, leżące na kołach o mniejszych promieniach są mniejsze od tych, które leżą na kołach o mniejszych promieniach. Zatem zbiór elementów minimalnych to  $\{\langle 0, 0 \rangle\}$  (punkt  $\langle 0, 0 \rangle$  jest elementem najmniejszym).
- (b) Podzbiór płaszczyzny będzie łańcuchem, gdy z każdym okręgiem o środku w punkcie  $\langle 0, 0 \rangle$  będzie miał co najwyżej jeden punkt wspólny. Maksymalny będzie wówczas, gdy z każdym takim okręgiem będzie miał punkt wspólny. Zatem maksymalne łańcuchy to m. in. półproste domknięte o początku w punkcie  $\langle 0, 0 \rangle$ , np.  $L = \{\langle 0, x \rangle : x \in [0, +\infty)\}$ .
- (c) Nie. Jeśli punkt  $\langle a, b \rangle$  jest ograniczeniem górnym zbioru  $A$ , to  $a^2 + b^2 > 1^2 + 1^2 = 2$ . Ale wtedy każdy punkt  $\langle c, d \rangle$ , taki że  $a^2 + b^2 > c^2 + d^2 > 2$ , jest ograniczeniem górnym zbioru  $A$  i  $\langle c, d \rangle \prec \langle a, b \rangle$ . Wobec tego w zbiorze ograniczeń górnych zbioru  $A$  nie można znaleźć elementu najmniejszego.
- (d) Tak. Jediną niepustą relacją, która jest równocześnie relacją równoważności i relacją porządku jest relacja równości. Relacja  $\preceq$  po obcięciu do zbioru  $B$  staje się relacją równości dokładnie wtedy, gdy zbiór ten jest antyłańcuchem. Zatem w zadaniu pytamy się tak

naprawdę o istnieniu nieskończonego antyłańcucha. A taki oczywiście istnieje – przykładem jest każdy okrąg o środku w punkcie  $\langle 0, 0 \rangle$ .

# Bibliografia

- [1] Cichoń J.: *Wykłady ze Wstępu do Matematyki*. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 2003.
- [2] Kraszewski J.: *Wstęp do matematyki*. WNT, Warszawa 2007.
- [3] Just W., Weese M.: *Discovering Modern Set Theory I: The Basics*. Graduate Studies in Mathematics, Vol 8, AMS, Providence 1996.
- [4] Guzicki W., Zakrzewski P.: *Wykłady ze wstępu do matematyki. Wprowadzenie do teorii mnogości*. WN PWN, Warszawa 2005.
- [5] Guzicki W., Zakrzewski P.: *Wstęp do matematyki. Zbiór zadań*. WN PWN, Warszawa 2005.
- [6] Kuratowski K., *Wstęp do teorii mnogości i topologii*. WN PWN, Warszawa 2004.
- [7] Ławrow I.A., Maksimowa Ł.L.: *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów*. WN PWN, Warszawa 2004.
- [8] Marek W., Onyszkiewicz J., *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*. WN PWN, Warszawa 2004.
- [9] Rasiowa H.: *Wstęp do matematyki współczesnej*. WN PWN, Warszawa 2004.