Zbiór zadań ze wstępu do matematyki

Jan Kraszewski

Wrocław 2009

Spis treści

Przedmowa

W zbiorach zadań ze wstępu do matematyki zadania zazwyczaj są tak pogrupowane, by dotyczyły pojęć z poszczególnych działów, omawianych w ramach tego przedmiotu (takich jak „Funkcje”, „Relacje” czy „Moce zbiorów”). Jest to uzasadnione, gdyż studenci poznają kolejne pojęcia sukcesywnie i nieuprawnionym byłoby oczekiwanie, że będą w stanie rozwiązywać zadania, dotyczące całego materiału. Z takimi spotykają się na ogół dopiero na egzaminie.

Przygotowując ten zbiór zadań chciałem odejść od opisanej powyżej zasady. Zebrane w nim zadania wymagają całościowej wiedzy ze wstępu do matematyki. Ważne jest też, by materiał ten był nie tylko opanowany, ale także dobrze zrozumiany. Wiele z tych zadań, choć wygląda skomplikowanie, ma w rzeczywistości krótkie rozwiązania, a główna ich trudność polega na tym, że występujące w nich obiekty mają dość skomplikowaną naturę i wymagają właśnie dobrego zrozumienia. Z tych też powodów zbiór dobrze nadaje się do przygotowań przedegzaminacyjnych.

Do wszystkich zadań opracowane są zarówno wskazówki, jak i odpowiedzi. Dzięki temu osoby, które preferują samodzielne rozwiązywanie zadań, a nie mają pomysłu, jak zacząć, mogą najpierw skorzystać ze wskazówki.

Wszystkie definicje pojęć i oznaczenia są zgodne z podręcznikiem [2]. W rozwiązaniach nie dowodzę faktów, które zostały udowodnione w tym podręczniku.

Autor prosi o zgłaszanie mu wszelkich uwag, dotyczących niniejszego zbioru, w szczególności przeoczonych pomyłek i błędów, pod adresem
`Jan.Kraszewski@math.uni.wroc.pl` .

Niniejszy skrypt został przygotowany i sfinansowany w ramach projektu Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego „Zamawianie kształcenia na kierunkach technicznych, matematycznych i przyrodniczych - pilotaż”, współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Jan Kraszewski

Rozdział 1

Zadania

1. Niech A, B, C będą dowolnymi niepustymi podzbiorami zbioru $\mathbb{R}$, a D – dowolnym podzbiorem zbioru $\mathbb{R}$.

(a) Wyjaśnić słowami (bez użycia symboli), jaką własność zbioru D opisuje zdanie
$$(\forall x \in D)(\exists y \in D)\, x \neq y.$$

(b) Zapisać symbolicznie wyrażenie
Rodzina zbiorów $\{A, B, C\}$ jest rodziną rozłączną.

(c) Czy warunek $(A \setminus B) \cup C = C$ jest warunkiem koniecznym do tego, by $A \subseteq C$? Odpowiedź uzasadnić.

(d) Czy jeśli $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$, to może zajść $B \times C \subseteq C \times A$? Odpowiedź uzasadnić.

(e) Podać jak najsłabszy warunek na moce zbiorów A i B, wystarczający do tego, by $A \setminus B \sim \mathbb{R}$. Odpowiedź uzasadnić.

2. Niech A, B, C będą dowolnymi, różnymi podzbiorami zbioru $\mathbb{R}$.

(a) Zapisać symbolicznie następujące wyrażenia. W podpunkcie (ii) nie wolno użyć kwantyfikatorów.

(i) Każdy podzbiór zbioru A zawiera się zbiorze B lub jest rozłączny z pewnym niepustym podzbiorem zbioru C.

(ii) Rodzina $\{A, B, C\}$ jest antyłańcuchem w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle \mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq \rangle$.

(b) Czy jeśli $A \times B \nsubseteq C \times C$, to $A \nsubseteq C$ i $B \nsubseteq C$? Odpowiedź uzasadnić.

(c) Czy jeśli $A \triangle B \subseteq C$, to $A \cap B = \emptyset \Rightarrow B \subseteq C$? Odpowiedź uzasadnić.

(d) Czy jeśli istnieją surjekcja $f : B \to C$ i injekcja $g : C \to B$, to $B \sim C$? Odpowiedź uzasadnić.

3. Niech A, B, C będą dowolnymi, różnymi podzbiorami zbioru $\mathbb{N}$.

(a) Zapisać symbolicznie następujące wyrażenia. Nie wolno użyć symbolu mocy zbioru $| \, |$.

(i) Nieskończenie wiele liczb parzystych należy do zbioru A.

(ii) Rodzina $\{A, B, C\}$ jest podziałem zbioru $\mathbb{N}$.

(b) Udowodnić, że jeśli $A \cap B \cap C \neq \emptyset$, to $A \times C = B \times C \Rightarrow A = B$.

(c) Czy jeśli $A \cap B = A \cup C$, to $C \cap (B \setminus A) = \emptyset$? Odpowiedź uzasadnić.

(d) Niech $D = \{n \in \mathbb{N} : (\exists k \in \mathbb{N})\, n = 3k\}$. Czy jeśli $|D \setminus A| < \aleph_0$, to $D \sim A$? Odpowiedź uzasadnić.

4. Niech A, B i C będą dowolnymi niepustymi podzbiorami zbioru $\mathbb{R}$.

(a) Zapisać symbolicznie następujące wyrażenia.

(i) Każdy niepusty podzbiór zbioru A, który nie jest podzbiorem zbioru B, jest podzbiorem zbioru C.

(ii) Rodzina zbiorów $\{A, B, C\}$ nie jest rodziną zbiorów parami rozłącznych.

(b) Czy z faktów, że $A \cap C = B \cap C$ i $A \setminus C = B \setminus C$ wynika, że $A = B$? Odpowiedź uzasadnić.

(c) Czy z faktu, że $A \cup C \neq B \cup C$ wynika, że $A \neq B$? Odpowiedź uzasadnić.

(d) Czy z faktu, że zbiory A i B są nieskończone wynika, że $A \sim B$? Odpowiedź uzasadnić.

5. Niech A, B, C będą dowolnymi, różnymi podzbiorami zbioru $\mathbb{R}$.

(a) Zapisać symbolicznie następujące wyrażenia.

(i) Dokładnie dwa spośród zbiorów A, B, C są niepuste.

(ii) Zbiór A nie jest ograniczeniem górnym rodziny $\{B, C\}$ w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle \mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq \rangle$.

(b) Czy warunek $A \times B \subseteq C$ jest warunkiem wystarczającym do tego, by $A = \emptyset$? Odpowiedź uzasadnić.

(c) Czy jeśli $\mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$, to $C \subseteq A \cap B$? Odpowiedź uzasadnić.

(d) Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $A \subseteq \mathbb{R}$. Czy z faktu, że funkcja $f \restriction A$ jest surjekcją wynika, że funkcja f jest surjekcją? Odpowiedź uzasadnić.

6. Niech A, B, C będą dowolnymi, różnymi podzbiorami zbioru $\mathbb{R}$.

(a) Zapisać symbolicznie następujące wyrażenia.

(i) Każdy element zbioru A należy do dokładnie jednego ze zbiorów B i C.

(ii) Rodzina $\{A, B, C\}$ nie jest łańcuchem w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle \mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq \rangle$.

(b) Udowodnić, że jeśli niepuste zbiory A, B i C spełniają warunek (i) z podpunktu (a), to spełniają warunek (ii) z podpunktu (a).

(c) Czy jeśli $C \times B \subseteq C \times A$, to $B \subseteq A$? Odpowiedź uzasadnić.

(d) Czy jeśli istnieje injekcja $f : \mathbb{R} \to A$, to warunek $A \cap B \neq \emptyset$ jest warunkiem wystarczającym na to, by istniała surjekcja $g : A \cap B \to \mathbb{R}$? Odpowiedź uzasadnić.

7. Niech A, B, C będą dowolnymi niepustymi, różnymi podzbiorami zbioru $\mathbb{R}$.

(a) Zapisać symbolicznie następujące wyrażenia.

(i) Do zbioru A należą wszystkie ograniczenia dolne zbioru $B \cup C$.

(ii) Rodzina $\{A, B, C\}$ jest podziałem zbioru $\mathbb{R}$.

(b) Podać przykład zbiorów A, B, C, spełniających koniunkcję warunków z podpunktu (a).

(c) Czy z faktu, że $B \subseteq A \cup C$ wynika, że $C \subseteq (A \cup B \cup C) \setminus (A \setminus B)$? Odpowiedź uzasadnić.

(d) Zakładamy, że $(A \times C) \cap (C \times B) \neq \emptyset$. Czy może zajść $A \cap B \cap C = \emptyset$? Odpowiedź uzasadnić.

(e) Czy z faktu, że $0 < |(A \times A) \triangle (B \times B)| < \aleph_0$ wynika, że zbiór A jest skończony? Odpowiedź uzasadnić.

8. Rozważamy funkcję $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ daną wzorem $f(x) = x^2 + x$.

(a) Wyznaczyć $f[A]$, gdzie $A = [-2, 1] \cap \mathbb{Z}$.

(b) Wyznaczyć $f^{-1}[B]$, gdzie $B = \{x \in \mathbb{N} : |x - 1| \leq 2\}$.

(c) Czy funkcja f jest „na"? Odpowiedź uzasadnić.

(d) Zdefiniować funkcję $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tak, by obraz $\mathrm{rng}(g)$ był zbiorem nieskończonym i funkcja $f \circ g$ była różnowartościowa. Odpowiedź uzasadnić.

(e) Czy istnieje funkcja $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ taka, by funkcja $f \circ h$ była „na"? Odpowiedź uzasadnić.

9. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ daną wzorem $f(x) = x^2 + 1$.

(a) Wyznaczyć $(f \circ f)(x^2 + 1)$.

(b) Wyznaczyć $f[A]$, gdzie $A = [-2, 1]$.

(c) Wyznaczyć $f^{-1}[B]$, gdzie $B = (2, 3)$.

(d) Rozważmy funkcję $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zadaną wzorem $g_\alpha(x) = f(x - \alpha)$ (gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$ jest parametrem). Wyznaczyć zbiór

$$C = \{\alpha \in \mathbb{R} : g_\alpha \text{ jest funkcją różnowartościową}\}.$$

Odpowiedź uzasadnić.

10. Niech $F : \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$ będzie funkcją zadaną wzorem $F(f) = f \circ f$. Niech $id_\mathbb{N} \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ oznacza funkcję identycznościową. Niech $h \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ będzie funkcją zadaną wzorem $h(x) = 0$.

(a) Podać przykład funkcji $g \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \setminus \{id_\mathbb{N}, h\}$ takiej, że $F(g) = g$. Odpowiedź uzasadnić.

(b) Czy funkcja F jest injekcją? Odpowiedź uzasadnić.

(c) Udowodnić, że jeśli $F(f) = id_{\mathbb{N}}$, to funkcja f jest bijekcją.

(d) Znaleźć zbiór $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ jak największej mocy, o następującej własności:

$$A \subseteq F^{-1}[\{h\}].$$

11. Niech $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie rzutem na drugą oś (tzn. $\pi_2(x, y) = y$). Rozważamy funkcję $F : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ zadaną wzorem $F(X) = \pi_2[X]$.

(a) Czy funkcja F jest różnowartościowa? Odpowiedź uzasadnić.

(b) Czy funkcja F jest surjekcją? Odpowiedź uzasadnić.

(c) Wyznaczyć $F^{-1}[\{\{-1\}\}]$.

(d) Niech $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją zadaną wzorem $g(x) = x^2$. Definiujemy funkcję $G : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ wzorem $G(X) = g^{-1}[X]$. Czy istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^2$ taki, że $|G \circ F(A)| = 3$? Odpowiedź uzasadnić.

12. Niech funkcja $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ będzie zadana wzorem $F(f) = f^{-1}[\{1\}]$.

(a) Czy funkcja F jest różnowartościowa? Odpowiedź uzasadnić.

(b) Czy funkcja F jest „na"? Odpowiedź uzasadnić.

(c) Niech $S \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji stałych. Wyznaczyć $F[S]$.

(d) Wyznaczyć $|F^{-1}[\{\{1\}\}]|$. Odpowiedź uzasadnić.

13. Niech $A = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f \text{ nie jest surjekcją}\}$ i niech funkcja $F : A \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ będzie zadana wzorem $F(f) = \mathrm{rng}(f)$.

(a) Czy funkcja F jest różnowartościowa? Odpowiedź uzasadnić.

(b) Czy funkcja F jest „na"? Odpowiedź uzasadnić.

(c) Niech $B = \{f \in A : f \text{ jest ograniczona}\}$. Wyznaczyć $F[B]$.

(d) Niech $C = \{\{0, 1\}\}$. Wyznaczyć $|F^{-1}[C]|$. Odpowiedź uzasadnić.

14. Niech $f, g, h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będą funkcjami danymi wzorami $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2 - 2x + 2$ i $h(x) = 0$. Niech funkcja $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie dana wzorem $F(\varphi) = \varphi \circ f$.

(a) Czy prawdą jest, że $g[A] \cap g[B] \neq \emptyset \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$?

(b) Czy funkcja F jest różnowartościowa?

(c) Czy $g \in F^{-1}[\{f\}]$?

(d) Wyznaczyć $|F^{-1}[\{h\}]|$.

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić.

15. Niech $X = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 6\}$.

(a) Czy istnieje funkcja $f : X \to X$ taka, że $f \circ f = id_X$ i $(\forall x \in X)\, f(x) \neq x$? Odpowiedź uzasadnić.

(b) Rozważmy funkcję $g : X \to X$ daną wzorem $g(x) = |x - 2|$. Uzasadnić, że nie istnieje częściowy porządek $\preceq$ na zbiorze X taki, że

$$(\forall x \in X)\, x \preceq g(x).$$

(c) Rozważmy funkcję $h : X \times \mathbb{N} \to X \times \mathbb{N}$ daną wzorem $h(x, y) = \langle x, x+y \rangle$.

(i) Wyznaczyć $h^{-1}[\{\langle 3, 2 \rangle\}]$.

(ii) Wyznaczyć $|\operatorname{rng}(h)|$. Odpowiedź uzasadnić.

16. Niech R i S będą relacjami na zbiorze $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 10\}$, zdefiniowanymi następująco:

$$xRy \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\, x^2 - y^2 = 5k, \qquad xSy \Leftrightarrow x \cdot y \neq 8.$$

(a) Uzasadnić, że R jest, a S nie jest relacją równoważności.

(b) Wyznaczyć $[2]_R$.

(c) Wyznaczyć $|A/_R|$. Odpowiedź uzasadnić.

(d) Czy $R \cap S$ jest relacją równoważności? Odpowiedź uzasadnić.

17. Niech $I = \{2, 3, 5, 7\}$. Niech $R \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ będzie relacją równoważności zadaną warunkiem

$$xRy \Leftrightarrow (\forall p \in I)(p|x \Leftrightarrow p|y).$$

(a) Czy $12 \in [18]_R$?

(b) Czy $\{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{N}^+/_R$?

(c) Czy relacja $R \circ R$ jest spójna?

(d) Wyznaczyć $|\mathbb{N}^+/_R|$.

Wszystkie odpowiedzi uzasadnić.

18. Dla każdego $n \in \{0,1,2\}$ na zbiorze $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ definiujemy relację równoważności R_n warunkiem

$$f\, R_n\, g \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{N})(f(k) > n \Leftrightarrow g(k) > n).$$

Niech $\varphi, \psi \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ będą funkcjami, zadanymi wzorami $\varphi(x) = 0,\ \psi(x) = x$.

(a) Wyznaczyć $[\varphi]_{R_0}$.

(b) Wyznaczyć $|[\varphi]_{R_1}|$. Odpowiedź uzasadnić.

(c) Czy $\psi\, R_1 \circ R_2\, \varphi$? Odpowiedź uzasadnić.

(d) Wyznaczyć $|\mathbb{N}^\mathbb{N}/_{R_1}|$. Odpowiedź uzasadnić.

19. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ zadaną wzorem $f(x,y) = x^2 - y$. Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze $\mathbb{Z}^2$, zadaną warunkiem

$$\langle x,y\rangle\, R\, \langle a,b\rangle \Leftrightarrow f(x,y) = f(a,b).$$

(a) Czy funkcja f jest „na”? Odpowiedź uzasadnić.

(b) Wyznaczyć klasę abstrakcji $[\langle 0,0\rangle]_R$.

(c) Wyznaczyć obraz klasy abstrakcji $f\,[[\langle 2,-3\rangle]_R]$.

(d) Niech $A \subseteq \mathbb{Z}^2$ będzie nieskończonym zbiorem, który z każdą klasą abstrakcji relacji R ma co najwyżej jeden wspólny element. Czy funkcja $f \restriction A$ jest różnowartościowa? Czy jest „na”? Odpowiedzi uzasadnić.

(e) Niech $X = \{0,1,2\}$. Wyznaczyć $|X^2/_{R \restriction X^2}|$. Odpowiedź uzasadnić.

20. Niech $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będą rzutami odpowiednio na pierwszą i drugą oś (tzn. $\pi_1(x,y) = x$, $\pi_2(x,y) = y$). Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ definiujemy relację równoważności R warunkiem

$$A\, R\, B \Leftrightarrow \pi_1[A] = \pi_1[B].$$

(a) Niech $C = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$. Czy $C \in [\mathbb{R}^2]_R$? Odpowiedź uzasadnić.

(b) Podać przykład zbioru $D \in [\mathbb{R}^2]_R$, takiego że $|\pi_2[D]| = 2$.

(c) Wyznaczyć $[\{\langle 0, 0\rangle\}]_R$.

(d) Niech $E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Czy istnieje zbiór $F \in [E \times \mathbb{N}]_R$, taki że $|F| = \aleph_0$? Odpowiedź uzasadnić.

21. Niech T będzie relacją równoważności na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ zadaną warunkiem

$$\langle a_n : n \in \mathbb{N}\rangle T \langle b_n : n \in \mathbb{N}\rangle \Leftrightarrow a_0 = b_0.$$

Niech $\langle c_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ będzie ciągiem, zadanym warunkiem $(\forall n \in \mathbb{N})\, c_n = 0$.

(a) Podać przykład ciągu $\langle d_n : n \in \mathbb{N}\rangle$, różnego od ciągu $\langle c_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ i takiego, że

$$[\langle c_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_T \cap [\langle d_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_T \neq \emptyset.$$

Odpowiedź uzasadnić.

(b) Opisać zbiór ilorazowy $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_T$.

(c) Jaka jest moc zbioru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_T$? Odpowiedź uzasadnić.

(d) Pokazać, że $|[\langle c_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_T| = \mathfrak{c}$.

22. Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ zadaną warunkiem

$$A\, R\, B \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{Z})\, B = A + x,$$

gdzie $A + x = \{a + x : a \in A\}$.

(a) Czy $\{1, 2, 4\} \in [\{5, 7, 8\}]_R$? Odpowiedź uzasadnić.

(b) Czy istnieje pięcioelementowa klasa abstrakcji relacji R? Odpowiedź uzasadnić.

(c) Wyznaczyć $|\{\mathcal{A} \in (\mathcal{P}(\mathbb{Z}))/_R : (\forall B \in \mathcal{A})|B| = 1\}|$. Odpowiedź uzasadnić.

(d) Udowodnić, że $|\{\mathcal{A} \in (\mathcal{P}(\mathbb{Z}))/_R : (\forall B \in \mathcal{A})|B| = 2\}| = \aleph_0$.

(e) Wyznaczyć $|\mathcal{P}(\mathbb{Z})/_R|$. Odpowiedź uzasadnić.

23. Rozważmy relację równoważności R na zbiorze funkcji $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ zadaną warunkiem

$$f\; R\; g \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(f(n) \geq 0 \Leftrightarrow g(n) \geq 0).$$

(a) Niech funkcje $f, g \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ będą zadane wzorami $f(n) = n^2 - 1$ i $g(n) = n$. Czy $[f]_R = [g]_R$? Odpowiedź uzasadnić.

(b) Wyznaczyć klasę abstrakcji funkcji $h \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, zadanej wzorem $h(n) = (-1)^n$.

(c) Znaleźć zbiór $A \subseteq \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ jak największej mocy, mający następującą własność:

$$(\forall f, g \in A)\, f \neq g \Rightarrow \neg f\, R\, g.$$

24. Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ zadaną warunkiem

$$ARB \Leftrightarrow (A \subseteq \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N} \wedge B \subseteq \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N} \wedge A = B) \vee (A \not\subseteq \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N} \wedge B \not\subseteq \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N} \wedge A \cap \mathbb{N} = B \cap \mathbb{N}).$$

(a) Czy $\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\} \in [\{1\}]_R$? Odpowiedź uzasadnić.

(b) Podać przykład zbioru $C \subseteq \mathbb{Z}$, takiego że $|[C]_R| < \aleph_0$. Odpowiedź uzasadnić.

(c) Podać przykład nieskończonego zbioru $D \subseteq \mathbb{Z}$ takiego, że

$$D \in [\{x \in \mathbb{Z} : |x+1| \leq 1\}]_R.$$

(d) Wyznaczyć $|[\mathbb{Z}]_R|$. Odpowiedź uzasadnić.

(e) Wyznaczyć $|\mathcal{P}(\mathbb{Z})/_R|$. Odpowiedź uzasadnić.

25. Niech $X = \{n \in \mathbb{N}^+ : n \leq 6\}$. Niech funkcja $f : X \to X$ będzie dana wzorem $f(x) = [\sqrt{3x}]$, gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od $x \in \mathbb{R}$. Na zbiorze $\mathcal{P}(X)$ definiujemy relację równoważności R warunkiem

$$A\, R\, B \Leftrightarrow f[A] = f[B]$$

oraz relację S warunkiem

$$A\, S\, B \Leftrightarrow f^{-1}[A] \subseteq f^{-1}[B].$$

(a) Wyznaczyć $[\emptyset]_R$.

(b) Czy $\{3, 6\}\, S \circ R\, \{4\}$? Odpowiedź uzasadnić.

(c) Wyznaczyć $|\mathcal{P}(X)/_R|$. Odpowiedź uzasadnić.

(d) Wyznaczyć największy zbiór $C \in \mathcal{P}(X)$, dla którego relacja $S \restriction \mathcal{P}(C)$ jest relacją częściowego porządku. Odpowiedź uzasadnić.

26. Niech $X = \{(a, b) : a \in \mathbb{R} \land b \in \mathbb{R} \land a < b\}$. Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $\langle X, \preceq \rangle$, gdzie

$$I \preceq J \Leftrightarrow \inf I \leq \inf J \land \sup I \leq \sup J.$$

(a) Czy istnieje $J \in X$ nieporównywalny z przedziałem $(0, 2)$ i taki, że $J \preceq (1, 3)$? Odpowiedź uzasadnić.

(b) Podać przykład nieprzeliczalnego antyłańcucha w X.

(c) Podać przykład nieskończonego łańcucha w X, którego żadne dwa elementy nie są rozłączne.

(d) Czy w zbiorze $A = \mathcal{P}([0, 1]) \cap X$ istnieje element maksymalny? Odpowiedź uzasadnić.

27. Niech $\leq_1$ będzie częściowym porządkiem na zbiorze $\mathbb{R}$, zadanym warunkiem

$$x \leq_1 y \Leftrightarrow (\forall z \in \mathbb{R})(x < z \Rightarrow y < z).$$

Poniższe pytania dotyczą zbioru uporządkowanego $\langle \mathbb{R}, \leq_1 \rangle$.

(a) Czy $3 \leq_1 \pi$? Odpowiedź uzasadnić.

(b) Czy porządek $\leq_1$ jest liniowy? Odpowiedź uzasadnić.

(c) Wskazać podzbiór $B \subseteq \mathbb{R}$, w którym nie ma elementu maksymalnego i $\sup B = 2$.

(d) Niech $\leq_2$ będzie obcięciem relacji $\leq_1$ do zbioru $\mathbb{N}$. Czy dla dowolnych $x, y \in \mathbb{N}$ prawdą jest, że

$$x \leq_2 y \Leftrightarrow (\forall z \in \mathbb{N})(x < z \Rightarrow y < z)?$$

Odpowiedź uzasadnić.

28. Niech relacja $\preceq$ będzie częściowym porządkiem na zbiorze $\mathbb{N}^2$, zadanym warunkiem

$$\langle x, y \rangle \preceq \langle a, b \rangle \Leftrightarrow (x = a \land y = b) \lor (x < a \land y < b).$$

(a) Podać przykład nieskończonego antyłańcucha w $\mathbb{N}^2$.

(b) Wyznaczyć zbiór elementów minimalnych w $\mathbb{N}^2$.

(c) Niech $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ będzie rzutem na pierwszą oś (tzn. $\pi(x, y) = x$). Czy istnieje nieskończony łańcuch $L \subseteq \mathbb{N}^2$ taki, że $|\pi[L]| < \aleph_0$? Odpowiedź uzasadnić.

29. Niech $X = \{(a, b) : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b\}$. Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $\langle X, \preceq\rangle$, gdzie

$$I \preceq J \Leftrightarrow I = J \vee \sup I \leq \inf J.$$

(a) Czy istnieje $J \in X$ taki, że $(0, 1) \prec J \prec (1, 2)$? Odpowiedź uzasadnić.

(b) Czy w $\mathcal{P}((-\infty, 1)) \cap X$ istnieje element największy? Odpowiedź uzasadnić.

(c) Podać przykład nieskończonego antyłańcucha $\mathcal{A} \subseteq X$, takiego że $\bigcap_{I \in \mathcal{A}} I = \emptyset$.

(d) Czy istnieje nieprzeliczalny łańcuch w X? Odpowiedź uzasadnić.

30. Niech $\preceq$ będzie częściowym porządkiem na zbiorze $\mathbb{N}^+$ zadanym wzorem

$$x \preceq y \Leftrightarrow (2|x \wedge 2|y \wedge (\exists k \in \mathbb{N})\, y = 2^k x) \vee (2\not| x \ \wedge \ 2\not| y \ \wedge \ x \leq y).$$

Pytania dotyczą zbioru częściowo uporządkowanego $\langle \mathbb{N}^+, \preceq\rangle$.

(a) Czy $2 \preceq 12$? Odpowiedź uzasadnić.

(b) Czy w zbiorze $\mathbb{N}^+$ istnieje element maksymalny? Odpowiedź uzasadnić.

(c) Podać przykład nieskończonego antyłańcucha w zbiorze $\mathbb{N}^+$.

(d) Czy istnieje element $z \in \mathbb{N}^+$, który ma dwa nieporównywalne poprzedniki (element $t \in \mathbb{N}^+$ nazywamy poprzednikiem elementu $z \in \mathbb{N}^+$, gdy $t \prec z$)? Odpowiedź uzasadnić.

31. Niech $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ będzie bijekcją zadaną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{jeśli } x < 0 \\ 2x & \text{jeśli } x \geq 0. \end{cases}$$

Niech $\preceq$ będzie częściowym porządkiem na zbiorze $\mathbb{N}$, zadanym warunkiem

$$n \preceq m \Leftrightarrow f^{-1}(n) \leq f^{-1}(m).$$

Podpunkty (a)–(c) dotyczą zbioru częściowo uporządkowanego $\langle \mathbb{N}, \preceq\rangle$.

(a) Czy $7 \prec 9$? Odpowiedź uzasadnić.

(b) Czy istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$, który ma dwa różne elementy maksymalne? Odpowiedź uzasadnić.

(c) Podać przykład zbioru $B \subseteq \mathbb{N}$, nieograniczonego z dołu i takiego, że $\sup B = 4$.

(d) Niech $g = f \restriction \mathbb{N}$ i niech $C = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100\}$. Wyznaczyć $(g \circ f)^{-1}[C]$.

32. Niech $\preceq$ będzie częściowym porządkiem na $(\mathbb{N}^+)^2$ zadanym wzorem

$$\langle x, y\rangle \preceq \langle a, b\rangle \Leftrightarrow x|a \wedge b \leq y.$$

(a) Niech $A = \{2, 4, 6\}^2$.

  (i) Narysować (czytelny) diagram Hassego zbioru częściowo uporządkowanego $\langle A, \preceq\rangle$ (z podpisaniem wierzchołków).

  (ii) Wyznaczyć kres górny zbioru A (w $(\mathbb{N}^+)^2$).

(b) Czy w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle(\mathbb{N}^+)^2, \preceq\rangle$ jest element maksymalny? Odpowiedź uzasadnić.

(c) Podać przykład łańcucha $L \subseteq (\mathbb{N}^+)^2$ takiego, że

$$|\{x \in \mathbb{N}^+ : (\exists y \in \mathbb{N}^+)\, \langle x, y\rangle \in L\}| = \aleph_0$$

oraz

$$|\{y \in \mathbb{N}^+ : (\exists x \in \mathbb{N}^+)\, \langle x, y\rangle \in L\}| > 1.$$

33. Na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definiujemy relację częściowego porządku warunkiem

$$f \preceq g \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) f(n) \leq g(n).$$

(a) Jakie są elementy największe, najmniejsze, maksymalne i minimalne w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \preceq\rangle$ (jeśli istnieją – wskazać, jeśli nie istnieją – uzasadnić)?

(b) Wskazać nieskończony łańcuch w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \preceq\rangle$.

(c) Niech $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie dana wzorem $h(n) = n + 1$. Pokazać, że

$$|\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f \preceq h\}| = \mathfrak{c}.$$

34. Niech relacja $\preceq$ będzie częściowym porządkiem na zbiorze $\mathbb{R}$, zadanym warunkiem

$$x \preceq y \Leftrightarrow x = y \vee \{x\} < \{y\},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową z liczby x. Polecenia dotyczą zbioru częściowo uporządkowanego $\langle \mathbb{R}, \preceq \rangle$.

(a) Czy istnieje $x \in \mathbb{R}$ takie, że $\frac{10}{3} \prec x \prec \frac{5}{2}$? Odpowiedź uzasadnić.

(b) Czy w $\mathbb{R}$ istnieje element najmniejszy? Odpowiedź uzasadnić.

(c) Podać przykład nieskończonego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, takiego że w A istnieją dokładnie dwa elementy maksymalne.

(d) Czy w $\mathbb{R}$ istnieje nieprzeliczalny antyłańcuch? Odpowiedź uzasadnić.

35. Niech relacja $\preceq$ będzie częściowym porządkiem na zbiorze $\mathbb{R}^2$, zadanym warunkiem

$$\langle x, y \rangle \preceq \langle a, b \rangle \Leftrightarrow (x = a \wedge y = b) \vee (x^2 + y^2 < a^2 + b^2).$$

Polecenia dotyczą zbioru częściowo uporządkowanego $\langle \mathbb{R}^2, \preceq \rangle$.

(a) Wyznaczyć zbiór elementów minimalnych.

(b) Łańcuch $L \subseteq \mathbb{R}^2$ nazywamy *łańcuchem maksymalnym*, jeśli nie istnieje łańcuch $L' \subseteq \mathbb{R}^2$, będący właściwym nadzbiorem łańcucha L. Podać przykład łańcucha maksymalnego.

(c) Czy zbiór $A = [-1, 1]^2$ ma kres górny? Odpowiedź uzasadnić.

(d) Czy istnieje nieskończony podzbiór $B \subseteq \mathbb{R}^2$, taki że relacja $\preceq \restriction B$ jest relacją równoważności na zbiorze B? Odpowiedź uzasadnić.

Rozdział 2

Wskazówki do zadań

1. (a) Czy narzucająca się odpowiedź jest na pewno kompletna?
   (b) Żadnych kwantyfikatorów (bo i po co?)!
   (c) Czy z faktu, że $A \subseteq C$ wynika, że $A \setminus B \subseteq C$?
   (d) Pokazać, że jeśli $B \times C \subseteq C \times A$, to $B \subseteq C$ i $C \subseteq A$.
   (e) Im mniej zakładamy o mocy zbioru B, tym słabszy warunek dostajemy.

2. (b) Czy jeśli $\langle x, y \rangle \notin C \times C$, to $x \notin C$ i $y \notin C$?
   (c) Skorzystać z równości $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
   (d) Jakie znamy warunki, równoważne nierówności $|B| \leq |C|$?

3. (a) (i) Podzbiór zbioru liczb naturalnych jest nieskończony dokładnie wtedy, gdy jest nieograniczony.
   (ii) Jakie trzy warunki spełnia podział? Uproszczenie: o zbiorach A, B, C wiemy, że są różne.
   (b) Kluczowa jest niepustość zbioru C.
   (c) Nie wprost?
   (d) Wiemy, że $D = (D \cap A) \cup (D \setminus A)$.

4. (a) (ii) Bez kwantyfikatorów.
   (b) Patrz wskazówka do zad.
   (c) Kontrapozycja?
   (d) Czy jeden zbiór może być bardziej nieskończony od drugiego?.

5. (a) (i) Ile spośród zbiorów A, B, C jest pustych?
   (ii) Bez kwantyfikatorów.

(b) Co wynika z faktu, że zbiór $A \times B$ jest pusty.

(c) Wiemy, że $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(Y) \Rightarrow X \subseteq Y$.

(d) Funkcja jest surjekcją, gdy przyjmuje wszystkie możliwe wartości.

6. (a) (i) Skorzystać z przydatnej operacji teoriomnogościowej.
   (ii) Któreś zbiory muszą być nieporównywalne w sensie zawierania.

   (b) Nie wprost.

   (c) Czy zbiory A, B, C są niepuste?

   (d) Czy jeśli przekrój pewnego zbioru ze zbiorem dużym jest niepusty, to też musi być duży?

7. (a) (i) Każda liczba rzeczywista, jeśli jest ograniczeniem dolnym zbioru $B \cup C$, to należy do zbioru A;
   (ii) Co z założenia wiemy o zbiorach A, B, C?

   (b) Przedziały i półproste?

   (c) Diagram Venna może pomóc w podjęciu decyzji.

   (d) Co wynika z założenia? Czy to wystarczy?

   (e) Niepustość jest istotna, a rysunek może pomóc.

8. (a) $A = \{-2, -1, 0, 1\}$.

   (b) $B = \{0, 1, 2, 3\}$.

   (c) Jaka jest przeciwdziedzina funkcji f?

   (d) Funkcja g musi być różnowartościowa, podobnie jak obcięcie funkcji f do obrazu funkcji g.

   (e) Patrz podpunkt (c).

9. (a) $(f \circ f)(x^2 + 1) = f(f(x^2 + 1)) = f((x^2 + 1)^2 + 1)$.

   (b) Wykres może pomóc.

   (c) Wykres może pomóc.

   (d) $f(x - \alpha) = (x - \alpha)^2 + 1 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + 1$.

10. (a) Funkcja bardzo podobna do funkcji h?

    (b) Nie.

    (c) Wprost z definicji bijekcji.

    (d) Jak znaleźć continuum funkcji, z których każda po złożeniu z sobą samą daje funkcję stałą, równą zero? Wystarczy ograniczyć się do funkcji zero-jedynkowych.

11. (a) Czy istnieją dwa podzbiory płaszczyzny o tym samym rzucie na oś OY?

    (b) W jaki sposób, mając dany podzbiór prostej, skonstruować podzbiór płaszczyzny, którego rzutem będzie dany podzbiór?

    (c) $F^{-1}[\{\{-1\}\}]$ to rodzina podzbiorów płaszczyzny. Teraz trzeba dokładnie odczytać z definicji przeciwobrazu, co to znaczy, że $X \in F^{-1}[\{\{-1\}\}]$.

    (d) Czy istnieje podzbiór prostej rzeczywistej, którego przeciwobraz przez funkcję g ma dokładnie 3 elementy?

12. (a) Czy istnieją dwa różne ciągi liczb naturalnych, mające jedynki na tych samych miejscach?

    (b) Czy mając dany podzbiór zbioru liczb naturalnych umiemy wskazać ciąg, dla którego zbiór numerów wyrazów równych 1 pokrywa się z danym zbiorem?

    (c) Wynikiem musi być rodzina podzbiorów $\mathbb{N}$.

    (d) Pamiętamy, że $F^{-1}[\{\{1\}\}] \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Następnie korzystamy uważnie z definicji przeciwobrazu, by zorientować się, z jakich dokładnie funkcji składa się rozważany przeciwobraz. By wyznaczyć jego moc, dokonujemy szacowań – do otrzymania oszacowania z dołu wystarczy znaleźć podzbiór zbioru $F^{-1}[\{\{1\}\}]$ o którym łatwo możemy stwierdzić, że ma moc continuum.

13. (a) Czy trudno znaleźć dwie różne funkcje o tym samym obrazie?

    (b) Co wynika z faktu, że elementy zbioru A nie są surjekcjami?

    (c) Co możemy powiedzieć o obrazie funkcji ograniczonej?

    (d) Które funkcje mają obraz $\{0, 1\}$?

14. (a) Kontrapozycja?

    (b) Warto zauważyć, że działanie funkcji F polega na wybieraniu pewnego podciągu.

    (c) Czy $F(g) = f$?.

    (d) Ile jest ciągów liczb naturalnych, których parzyste wyrazy są zerami?

15. (a) Funkcja f o podanych własnościach łączy elementy zbioru X w pary.

    (b) Nie wprost.

(c) (i) Dla jakich par $\langle x, y\rangle$ mamy $x = 3$ i $x + y = 2$?
(ii) Tw. Cantora-Bernsteina.

16. (a) Czy relacja S jest przechodnia?
   (b) Kwadraty jakich liczb dają resztę 4 w dzieleniu przez 5?
   (c) Najprościej – wyznaczyć zbiór ilorazowy, najszybciej – zbadać reszty kwadratów w dzieleniu przez 5.
   (d) Czy relacja $R \cap S$ jest przechodnia?

17. (a) Jakie dzielniki ze zbioru I mają liczby 12 i 18?
   (b) Czy liczby 1 i 3 są w relacji R?
   (c) Czy istnieje spójna, nietrywialna relacja równoważności?
   (d) Jaka cecha jest wyabstrahowana? Jakie są jej możliwe wartości? Ile ich jest?

18. (a) Wystarczy dobrze zrozumieć definicję relacji – odpowiedź jest prosta.
   (b) Trzeba odczytać z definicji, jakim zbiorem jest $[\varphi]_{R_1}$.
   (c) Czy może istnieć świadek na to, że $\psi\, R_1 \circ R_2\, \varphi$?
   (d) Zastanowić się, jakie są możliwe wartości cechy, wyabstrahowanej przy pomocy relacji R_1, albo znaleźć dużo funkcji, parami nierównoważnych względem tej relacji.

19. (a) Tak.
   (b) Jakie pary przechodzą przez funkcję f na 0?
   (c) Bycie w jednej klasie abstrakcji relacji R to dawanie tej samej wartości przez funkcję f.
   (d) „Co najwyżej” jest kluczowe.
   (e) Nie należy bać się notacji – to proste zadanie.

20. (a) Wyznaczyć rzuty obu zbiorów.
   (b) Trzeba podać przykład zbioru, znając jego rzuty na obie osie.
   (c) $[\{\langle 0, 0\rangle\}]_R \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ – uwaga na byty (i zbiór pusty...)!
   (d) Co to jest $\pi_1[E \times \mathbb{N}]$?

21. (a) Jaki ciąg jest równoważny z ciągiem $\langle c_n : n \in \mathbb{N}\rangle$?
   (b) Warto zastanowić się, jaki jest efekt procesu abstrahowania – to pomoże elegancko opisać zbiór ilorazowy.

(c) Wprost z (b) – pod warunkiem, że mamy porządny opis...

(d) Tw. Cantora-Bernsteina – oszacowanie z dołu nie jest trudne, wystarczy zdefiniować odpowiednią injekcję.

22. (a) Skojarz relację R z przesuwaniem (translacją) zbiorów.

(b) Odpowiedz najpierw na to samo pytanie dla dwuelementowej klasy abstrakcji.

(c) Ile jest klas abstrakcji, składających się ze zbiorów jednoelementowych?

(d) Po czym poznajemy, że dwie pary liczb całkowitych są w relacji R?

(e) Kluczowe jest dobre oszacowanie z dołu.

23. (a) Jakie są wartości funkcji f i g w zerze.

(b) Trzeba dokładnie opisać szukany zbiór (ważne są zarówno miejsca parzyste, jak i nieparzyste).

(c) Można wskazać zbiór A mocy continuum.

24. (a) $\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}, \{1\} \nsubseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

(b) $C \subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$?

(c) $\{-2, -1, 0\} \nsubseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

(d) $[\mathbb{Z}]_R = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) : \mathbb{N} \subseteq A\}$.

(e) Czy dwa różne podzbiory zbioru liczb naturalnych wyznaczają różne klasy abstrakcji relacji R?

25. (a) Czy niepusty zbiór może mieć pusty obraz?

(b) Tak.

(c) Uwaga! Opisywanie zbioru ilorazowego „na piechotę” jest ryzykowne...

(d) Jakiej cechy brakuje relacji S do bycia częściowym porządkiem?

26. (a) Kiedy dwa przedziały są nieporównywalne?

(b) Jw.

(c) Wystarczy ustalić jeden koniec i zmieniać drugi.

(d) Nie.

27. (a) Czy porządek $\leq_1$ da się opisać w prostszy sposób?

(b) Natychmiastowe, gdy znamy ww. prostszy opis.

(c) Odcinek otwarty?

(d) Tak.

28. (a) $\langle 0,0\rangle \not\preceq \langle 0,1\rangle$.

(b) $\langle 0,0\rangle \not\preceq \langle 1,0\rangle$.

(c) Nie.

29. (a) Nie.

(b) Czy można znaleźć dwa elementy maksymalne?

(c) Rodzina zstępująca?

(d) Gdy dwa różne odcinki są porównywalne, to są rozłączne.

30. (a) Czy liczba 12 jest potęgą liczby 2?

(b) Dla każdej liczby nieparzystej łatwo znaleźć liczbę od niej większą (w sensie $\preceq$). A dla parzystej?

(c) Szukamy wśród podzbiorów zbioru liczb parzystych.

(d) Nie.

31. (a) Rysunek może pomóc.

(b) Czy w zbiorze uporządkowanym $\langle \mathbb{Z}, \leq\rangle$ istnieją dwa różne elementy maksymalne?

(c) Zbiór liczb nieparzystych plus coś?

(d) Można skorzystać z faktu, że $(g \circ f)^{-1}[C] = f^{-1}\left[g^{-1}[C]\right]$.

32. (a) (ii) Zaczynamy od szukania ograniczenia górnego.

(b) Patrzymy na pierwszą oś.

(c) Warto najpierw znaleźć nieskończony łańcuch przy ustalonej drugiej współrzędnej, a potem trochę go poprawić, by spełnić drugi warunek.

33. (a) Czy dla każdej funkcji istnieje funkcja od niej większa?

(b) Warto zacząć od funkcji stale równej zero.

(c) Dobry rysunek bardzo pomaga w znalezieniu prostych szacowań.

34. (a) $\left\{\frac{10}{3}\right\} = \frac{1}{3}$, $\left\{\frac{5}{2}\right\} = \frac{1}{2}$.

(b) Ile jest elementów minimalnych w zbiorze $\mathbb{R}$?

(c) Elementy maksymalne muszą mieć tę samą część ułamkową.

(d) Kiedy dwie liczby są nieporównywalne?

35. (a) Nie ma ich zbyt dużo.

(b) Prosta nie jest dobra.

(c) Jak ograniczyć z góry wierzchołki kwadratu?

(d) Kiedy relacja porządku może być relacją równoważności?

Rozdział 3

Odpowiedzi do zadań

1. (a) Zbiór D jest pusty lub ma przynajmniej dwa elementy.

   (b) $A \cap B = \emptyset \wedge A \cap C = \emptyset \wedge B \cap C = \emptyset$.

   (c) Tak. Ponieważ $A \setminus B \subseteq A$, więc jeśli $A \subseteq C$, to tym bardziej $A \setminus B \subseteq C$, co z kolei jest równoważne warunkowi $(A \setminus B) \cup C = C$.

   (d) Nie. Przypuśćmy nie wprost, że $B \times C \subseteq C \times A$. Ustalmy dowolne $b \in B$ i niech c będzie elementem zbioru C (takowy istnieje, bo $C \neq \emptyset$). Wówczas $\langle b, c\rangle \in B \times C$, zatem $\langle b, c\rangle \in C \times A$, czyli w szczególności $b \in C$. Oznacza to, że $B \subseteq C$. Rozumując analogicznie pokazujemy, że $C \subseteq A$. Wobec tego $B \subseteq A$. Wówczas $A \cap B = B$ i mamy

   $$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(B) \neq \{\emptyset\}$$

   (bo $B \neq \emptyset$), wbrew założeniu.

   (e) Niech $|A| = \mathfrak{c}$ i $|B| < \mathfrak{c}$. Wówczas $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$, czyli $A \setminus B \sim \mathbb{R}$ (warto też zauważyć, że warunek $|B| < \mathfrak{c}$ można by zastąpić jeszcze słabszym warunkiem $|A \cap B| < \mathfrak{c}$ – gdyby treść zadania na to pozwalała...).

2. (a) (i) $(\forall X \subseteq A)(X \subseteq B \vee (\exists Y \subseteq C)(Y \neq \emptyset \wedge X \cap Y = \emptyset))$;
   (ii) $\neg A \subseteq B \wedge \neg B \subseteq A \wedge \neg A \subseteq C \wedge \neg C \subseteq A \wedge \neg B \subseteq C \wedge \neg C \subseteq B$.

   (b) Nie. Zauważmy, że jeśli $\langle x, y\rangle \in A \times B \setminus C \times C$, to wprawdzie $x \in A$ i $y \in B$, ale $x \notin C$ **lub** $y \notin C$. Zatem jedno z zawierań $A \subseteq C$, $B \subseteq C$ nie będzie zachodzić, ale niekoniecznie oba. Pozostaje podać kontrprzykład, np. $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{2, 3\}$.

   (c) Tak. Załóżmy, że $A \triangle B \subseteq C$ i $A \cap B = \emptyset$. Ponieważ $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, więc $A \cup B \subseteq C$. Ale wówczas tym bardziej $B \subseteq C$.

(d) Nie. Warunki podane w zadaniu są równoważne i znaczą to samo: $|B| \leq |C|$. Zatem kontrprzykład to np. $B = \mathbb{N}$, $C = \{0\}$, $f(n) = 0$, $g(0) = 0$.

3. (a) (i) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in A)(m \geq n \wedge 2|m)$;
   (ii) $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge C \neq \emptyset \wedge A \cap B = \emptyset \wedge B \cap C = \emptyset \wedge$
   $\wedge A \cap C = \emptyset \wedge A \cup B \cup C = \mathbb{N}$.

   (b) Załóżmy nie wprost, że $A \neq B$. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że istnieje $a \in A \setminus B$. Ustalmy dowolne $c \in C$ (możemy to zrobić, bo z założenia $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ wynika, że $C \neq \emptyset$). Wówczas $\langle a, c \rangle \in A \times C$, ale $\langle a, c \rangle \notin B \times C$, czyli $A \times C \neq B \times C$, wbrew założeniu. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

   (c) Tak. Przypuśćmy nie wprost, że istnieje $x \in C \cap (B \setminus A)$. Wówczas w szczególności $x \in C$ i $x \notin A$. Pierwszy warunek zapewnia nam, że $x \in A \cup C$, a drugi – że $x \notin A \cap B$. Wobec tego $A \cap B \neq A \cup C$, sprzeczność.

   (d) Tak. Łatwo można pokazać, że $|D| = \aleph_0$. Ponieważ $D = (D \cap A) \cup (D \setminus A)$, więc skoro zbiór $D \setminus A$ jest skończony, to zbiór $D \cap A$ musi być nieskończony. Tym bardziej nieskończony jest zbiór A, jako nadzbiór zbioru $D \cap A$. Ale wiemy, że $A \subseteq \mathbb{N}$, czyli (z tw. Cantora-Bernsteina) otrzymujemy $|A| = \aleph_0$. Wobec tego $A \sim D$.

4. (a) (i) $(\forall X \subseteq A)(X \neq \emptyset \Rightarrow (X \nsubseteq B \Rightarrow X \subseteq C))$;
   (ii) $A \cap B \neq \emptyset \vee B \cap C \neq \emptyset \vee A \cap C \neq \emptyset$.

   (b) Tak. Mamy $A = (A \cap C) \cup (A \setminus C) = (B \cap C) \cup (B \setminus C) = B$.

   (c) Tak. Zgodnie z zasadą kontrapozycji wystarczy zauważyć, że jeśli $A = B$, to $A \cup C = B \cup C$. Ale to jest oczywiste.

   (d) Nie. Np. zbiory $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$ są nieskończone, ale $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$.

5. (a) (i) $A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee C = \emptyset$
   (zauważmy, że zbiory A, B, C są różne, zatem w powyższej alternatywie co najwyżej jeden składnik może być prawdziwy).
   (ii) $\neg B \subseteq A \vee \neg C \subseteq A$.

   (b) Nie. Ponieważ zbiór $A \times B$, jeśli jest niepusty, to jest zbiorem par liczb rzeczywistych, więc nie może się wówczas zawierać w zbiorze C. Zatem $A \times B = \emptyset$. Stąd jednak nie wynika, że $A = \emptyset$, bo równie dobrze może być $B = \emptyset$. Kontrprzykład: $A = \{1\}, B = \emptyset, C = \{2\}$.

   (c) Tak. Wiemy, że $X \subseteq Y \cap Z$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \subseteq Y$ i $X \subseteq Z$ oraz że jeśli $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(Y)$, to $X \subseteq Y$. Wobec tego jeśli

$\mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$, to $\mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{P}(A)$ i $\mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{P}(B)$, skąd $C \subseteq A$ i $C \subseteq B$. Zatem $C \subseteq A \cap B$, co kończy dowód.

(d) Tak. Skoro $A \subseteq \mathbb{R}$, to $\operatorname{rng}(f \restriction A) \subseteq \operatorname{rng}(f)$ (bo wartości funkcji obciętej są też wartościami funkcji obcinanej). Ale z założenia mamy $\operatorname{rng}(f \restriction A) = \mathbb{R}$, więc tym bardziej $\operatorname{rng}(f) = \mathbb{R}$, czyli f jest surjekcją.

6. (a) (i) $A \subseteq B \triangle C$;
(ii) $(\exists X, Y \in \{A, B, C\})(X \not\subseteq Y \wedge Y \not\subseteq X)$ lub
$(A \not\subseteq B \wedge B \not\subseteq A) \vee (A \not\subseteq C \wedge C \not\subseteq A) \vee (B \not\subseteq C \wedge C \not\subseteq B)$.

(b) Przypuśćmy nie wprost, że zbiory A, B, C tworzą łańcuch. Gdyby zbiór A zawierał którykolwiek ze zborów B, C, to z założenia (i) wnioskujemy, że $B \subseteq B \triangle C$ lub $C \subseteq B \triangle C$, skąd wynika $B \cap C = \emptyset$, co jest niemożliwe. Zatem $A \subseteq B$ i $A \subseteq C$, skąd $A \subseteq B \cap C$, czyli $A \cap (B \triangle C) = \emptyset$. Ale z warunku (i) wiemy, że $A \subseteq B \triangle C$. Wobec tego $A = \emptyset$, wbrew założeniu.

(c) Nie. Jeśli $C = \emptyset$, to założenie jest spełnione, niezależnie od zbiorów A i B. Kontrprzykład: $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \emptyset$.

(d) Nie. Pytamy się bowiem, czy jeśli zbiór A ma moc continuum i $A \cap B \neq \emptyset$, to zbiór $A \cap B$ ma moc continuum. Kontrprzykład: $A = \mathbb{R}$, $B = \{0\}$.

7. (a) (i) $(\forall m \in \mathbb{R})((\forall x \in B \cup C)(m \leq x) \Rightarrow m \in A)$;
(ii) $(A \cap B = \emptyset) \wedge (A \cap C = \emptyset) \wedge (B \cap C = \emptyset) \wedge (A \cup B \cup C = \mathbb{R})$.

(b) Np. $A = (-\infty, 0]$, $B = (0, 1)$, $C = [1, +\infty)$.

(c) Nie. Z diagramu Venna można odczytać, że dobrym kontrprzykładem będą takie zbiory A, B, C, że $(A \cap C) \setminus B \neq \emptyset$, np. $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$.

(d) Tak. Z założenia wynika, że istnieje para $\langle x, y \rangle \in (A \times C) \cap (C \times B)$, skąd $x \in A \cap C$ i $y \in B \cap C$. To jednak za mało, by przekrój $A \cap B \cap C$ musiał być niepusty. Przykład: $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{1, 2\}$.

(e) Tak. Przypuśćmy bowiem nie wprost, że zbiór A jest nieskończony. Zauważmy, że wówczas zbiór $A \times A$ również jest nieskończony, zatem nieskończony musi być też zbiór B. Istotnie, w przeciwnym przypadku zbiór $B \times B$ byłby skończony, co oznacza, że zbiór $(A \times A) \setminus (B \times B)$ byłby nieskończony. Ale $(A \times A) \setminus (B \times B) \subseteq (A \times A) \triangle (B \times B)$ i otrzymujemy sprzeczność ze skończonością zbioru $(A \times A) \triangle (B \times B)$.

Dalej, z założenia wiemy, że istnieje $\langle x, y\rangle \in (A \times A) \triangle (B \times B)$. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $\langle x, y\rangle \in (A \times A) \setminus (B \times B)$ (to założenie jest nieuprawnione, dopóki nie pokażemy, że $|B| \geq \aleph_0$). Wówczas $x \in A \setminus B$ lub $y \in A \setminus B$. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że $x \in A \setminus B$. Wtedy $\{x\} \times A \subseteq (A \times A) \triangle (B \times B)$. Ale zbiór $\{x\} \times A$ jest równoliczny ze zbiorem A, czyli jest nieskończony. Otrzymana sprzeczność ze skończonością zbioru $(A \times A) \triangle (B \times B)$ kończy dowód.

8. (a) $f[A] = \{0, 2\}$.
   (b) $f^{-1}[B] = \{-2, -1, 0, 1\}$.
   (c) Nie. Np. $1 \notin \text{rng}(f)$. Gdyby bowiem istniało $x \in \mathbb{Z}$, takie że $f(x) = 1$, to równanie $x^2 + x - 1 = 0$ miałoby rozwiązanie w liczbach całkowitych, co jest niemożliwe.
   (d) Przykładem może być funkcja zadana wzorem

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{jeśli } x \geq 0 \\ -2x - 1 & \text{jeśli } x < 0. \end{cases}$$

   Wówczas $\text{rng}(g) = \mathbb{N}$, a funkcja $f \circ g$ jest różnowartościowa. Istotnie, jeśli $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ i $x_1 \neq x_2$, to $g(x_1) \neq g(x_2)$ (gdyż, jak łatwo sprawdzić, funkcja g jest injekcją) oraz $g(x_1), g(x_2) \geq 0$. Zatem $f(g(x_1)) \neq f(g(x_2))$, gdyż funkcja $f \restriction \mathbb{N}$ jest różnowartościowa.
   (e) Nie. Ponieważ $\text{rng}(f \circ h) \subseteq \text{rng}(f)$, więc skoro $\text{rng}(f) \neq \mathbb{N}$, to tym bardziej $\text{rng}(f \circ h) \neq \mathbb{N}$.

9. (a) $(f \circ f)(x^2+1) = f(f(x^2+1)) = f((x^2+1)^2+1) = f(x^4+2x^2+2) = (x^4 + 2x^2 + 2)^2 + 1 = x^8 + 4x^6 + 8x^4 + 8x^2 + 5$.
   (b) $f[A] = \{x^2 + 1 : x \in [-2, 1]\} = [1, 5]$.
   (c) $f^{-1}[B] = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \in (2, 3)\} = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x^2 < 2\} = (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$.
   (d) Ponieważ $g_\alpha(x) = f(x-\alpha) = (x-\alpha)^2+1 = x^2-2\alpha x+\alpha^2+1$, więc funkcja g_α, jako funkcja kwadratowa, nie jest różnowartościowa (niezależnie od α). Zatem $C = \emptyset$.

10. (a) Np. $g(n) = 1$ (lub dowolna inna niezerowa funkcja stała).
   (b) Nie. Rozważmy funkcję $h_1 \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ zadaną warunkami $h_1(2) = 1$, $h_1(n) = 0$ dla $n \neq 2$. Wtedy $F(h_1) = F(h) = h$, zatem funkcja F nie jest injekcją.

(c) Załóżmy, że $F(f) = id_{\mathbb{N}}$. Pokażemy, że funkcja f jest różnowartościowa i „na”.
Ustalmy dowolne $n, m \in \mathbb{N}$ takie, że $f(n) = f(m)$. Wówczas

$$F(f)(n) = f(f(n)) = f(f(m)) = F(f)(m),$$

czyli z założenia $n = m$, co kończy dowód różnowartościowości funkcji f.
Ustalmy teraz dowolne $y \in \mathbb{N}$. Niech $x = f(y) \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$f(x) = f(f(y)) = F(f)(y) = y,$$

zatem funkcja f jest surjekcją.

(d) Dla dowolnej funkcji $\varphi \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ zdefiniujemy funkcję $f_\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wzorem

$$f_\varphi(n) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } n \leq 1 \\ \varphi(n-2) & \text{jeśli } n \geq 2. \end{cases}$$

Oczywiście, dla różnych funkcji φ otrzymujemy różne funkcje f_φ. Ponadto, jak łatwo sprawdzić, $f_\varphi \circ f_\varphi = h$. Wobec tego zbiór $A = \{f_\varphi : \varphi \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}$ mam moc continuum i $A \subseteq F^{-1}[\{h\}]$.

11. (a) Nie. Np. $F(\mathbb{R}^2) = F(\{0\} \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(b) Tak. Ustalmy bowiem $Y \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Wówczas $\{0\} \times Y \subseteq \mathbb{R}^2$ i $F(\{0\} \times Y) = \pi_2[\{0\} \times Y] = Y$.

(c) Ponieważ

$$X \in F^{-1}[\{\{-1\}\}] \Leftrightarrow F(X) \in \{\{-1\}\} \Leftrightarrow \pi_2[X] = \{-1\},$$

więc

$$F^{-1}[\{\{-1\}\}] = \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \{-1\}) \setminus \{\emptyset\}.$$

(d) Tak. Zauważmy najpierw, że $g^{-1}[\{0,1\}] = \{-1,0,1\}$. Wobec tego wystarczy wybrać podzbiór płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, którego rzut na drugą oś to $\{0,1\}$. Niech $A = \mathbb{R} \times \{0,1\}$. Wówczas $F(A) = \pi_2[\mathbb{R} \times \{0,1\}] = \{0,1\}$ i dalej, $G(F(A)) = g^{-1}[\{0,1\}] = \{-1,0,1\}$, zatem $|G \circ F(A)| = 3$.

12. (a) Nie. Niech funkcje $f_0, f_2 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będą zadane wzorami $f_0(n) = 0$ i $f_2(n) = 2$. Wtedy $F(f_0) = F(f_2) = \emptyset$.

(b) Tak. Ustalmy dowolny podzbiór $A \subseteq \mathbb{N}$. Wtedy dla funkcji charakterystycznej $\chi_A \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ zbioru A mamy $\chi_A^{-1}[\{1\}] = A$.

(c) Zauważmy, że funkcja stała f albo przyjmuje wartość 1 i wtedy $F(f) = f^{-1}[\{1\}] = \mathbb{N}$, albo wartość różną od 1 i wtedy $F(f) = f^{-1}[\{1\}] = \emptyset$. Ponieważ $F[S] = \{F(f) : f - \text{stała}\}$, więc $F[S] = \{\emptyset, \mathbb{N}\}$.

(d) Oznaczmy $C = F^{-1}[\{\{1\}\}]$. Z definicji przeciwobrazu mamy

$$C = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : F(f) \in \{\{1\}\}\} = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f^{-1}[\{1\}] = \{1\}\},$$

zatem do zbioru C należą te funkcje, które wartość 1 przyjmują dla argumentu równego 1 i tylko wtedy.
Pokażemy, że zbiór C ma moc continuum. Ponieważ $C \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, więc $|C| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$. Z drugiej strony, dla dowolnej funkcji $\varphi \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ rozważmy funkcję $f_\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ zadaną warunkami $f_\varphi(0) = 0, f_\varphi(1) = 1, f_\varphi(n) = \varphi(n-2)$ dla $n \geq 2$. Niech $D = \{f_\varphi : \varphi \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}\}$. Wówczas $|D| = |\{0,2\}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$ oraz $D \subseteq C$. Wobec tego $|C| \geq |D| = \mathfrak{c}$ i z tw. Cantora-Bernsteina wnioskujemy, że $|C| = \mathfrak{c}$.

13. (a) Nie. Niech funkcje $f_1, f_2 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będą zadane warunkami $f_1(0) = f_2(1) = 1, f_1(1) = f_2(0) = 0, f_1() = f_2(n) = 0$ dla $n \geq 2$. Wówczas $F(f_1) = F(f_2) = \{0,1\}$.

(b) Nie. Ponieważ żaden z elementów A nie jest surjekcją, więc $\mathbb{N} \notin \operatorname{rng}(F)$ (bo zbiór $\mathbb{N}$ nie jest obrazem żadnej funkcji $f \in A$).

(c) Ograniczoność funkcji $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ oznacza, że ograniczony jest jej obraz. Ograniczony, czyli skończony. Z drugiej strony, każdy skończony **niepusty** podzbiór zbioru liczb naturalnych daje się zrealizować jako obraz funkcji ograniczonej (wystarczy ponumerować jego elementy, a otrzymany ciąg skończony przedłużyć do ciągu nieskończonego, powtarzając ostatnią jego wartość). Wobec tego

$$F[B] = \{D \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : 0 < |D| < \aleph_0\}.$$

(d) Niech $C = \{\{0,1\}\}$. Z definicji przeciwobrazu mamy

$$F^{-1}[C] = \{f \in A : F(f) \in \{\{0,1\}\}\} = \{f \in A : \operatorname{rng}(f) = \{0,1\}\}.$$

Wobec tego $F^{-1}[C] = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \{h_0, h_1\}$, gdzie $h_0, h_1 \in A$ to funkcje stałe równe odpowiednio 0 i 1. Stąd nietrudno pokazać (wprost albo korzystając z tw. Cantora-Bernsteina), że $|F^{-1}[C]| = \mathfrak{c}$.

14. (a) Nie. Zauważmy, że rozważany warunek jest równoważny warunkowi $A \cap B = \emptyset \Rightarrow g[A] \cap g[B] = \emptyset$. Ten zaś warunek nie musi być spełniony, gdy funkcja nie jest różnowartościowa. W szczególności dla $A = \{0\}$ i $B = \{2\}$ mamy $g[A] = g[B] = \{2\}$, czyli $A \cap B = \emptyset$ i $g[A] \cap g[B] \neq \emptyset$.

(b) Nie. Niech funkcja $k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie zadana wzorem

$$k(n) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } 2|n \\ 1 & \text{jeśli } \neg 2|n. \end{cases}$$

Wówczas $F(k) = F(h) = h$.

(c) Nie. Istotnie, $g \in F^{-1}[\{f\}] \Leftrightarrow F(g) = f$, a wiemy, że

$$F(g)(0) = g(f(0)) = g(0) = 2 \neq 0 = f(0).$$

Zatem $F(g) \neq f$.

(d) Oznaczmy $C = F^{-1}[\{h\}]$. Z definicji przeciwobrazu wnioskujemy, że

$$C = \{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : F(\varphi) = h\} = \{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : (\forall n \in \mathbb{N})\varphi(2n) = 0\}.$$

Pokażemy, że $C \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. W tym celu zdefiniujemy funkcję $G : C \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ warunkiem

$$G(\varphi)(n) = \varphi(2n+1) \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

i uzasadnimy, że jest ona bijekcją.
Ustalmy $\varphi_1, \varphi_2 \in C$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Wówczas istnieje liczba nieparzysta $n \in \mathbb{N}$, taka że $\varphi_1(n) \neq \varphi_2(n)$ (liczba ta nie może być parzysta, bo dla liczb parzystych obie funkcje φ_1, φ_2 przyjmują wartość 0). Niech $n = 2m + 1$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Wtedy $G(\varphi_1)(m) \neq G(\varphi_2)(m)$, czyli $G(\varphi_1) \neq G(\varphi_2)$. Zatem funkcja G jest injekcją.
Ustalmy teraz $\psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Definiujemy funkcję $\varphi_\psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wzorem

$$\varphi_\psi(n) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } 2|n \\ \psi(\frac{n-1}{2}) & \text{jeśli } \neg 2|n. \end{cases}$$

Wówczas $\varphi_\psi \in C$ oraz $G(\varphi_\psi) = \psi$ (co sprawdza się prostym rachunkiem), czyli funkcja G jest surjekcją.
Wobec tego $|C| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$.

15. (a) Nie istnieje. Przypuśćmy bowiem, że taka funkcja f istnieje. Zauważmy, że jeśli dla pewnego $x \in X$ mamy $f(x) = y \in X$, to $f(y) = f(f(x)) = x$. Ponieważ z założenia $x \neq y$, więc funkcja f łączy elementy zbioru X w pary. Ale zbiór X ma nieparzystą liczbę elementów, sprzeczność.

(b) Przypuśćmy nie wprost, że na zbiorze X istnieje porządek $\preceq$ taki, że $(\forall x \in X)\, x \preceq g(x)$. Wówczas w szczególności mamy $0 \preceq g(0) = 2$ i $2 \preceq g(2) = 0$. Ze słabej antysymetrii relacji $\preceq$ wynika, że $0 = 2$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

(c) (i) Ponieważ

$$\langle x, y\rangle \in h^{-1}[\{\langle 3,2\rangle\}] \Leftrightarrow \langle x, x+y\rangle = \langle 3,2\rangle \Leftrightarrow x = 3 \wedge x+y = 2,$$

więc $y < 0$, co pozostaje w sprzeczności z $y \in \mathbb{N}$. Wobec tego $h^{-1}[\{\langle 3,2\rangle\}] = \emptyset$.
(ii) Zauważmy, że $\{0\} \times \mathbb{N} \subseteq \operatorname{rng}(h) \subseteq \mathbb{N}^2$. Wobec tego

$$\aleph_0 = |\{0\} \times \mathbb{N}| \leq |\operatorname{rng}(h)| \leq |\mathbb{N}^2| = \aleph_0,$$

zatem z tw. Cantora-Bernsteina wynika, że $|\operatorname{rng}(h)| = \aleph_0$.

16. (a) Relacja R jest relacją równoważności, gdyż jest
zwrotna: dla dowolnego $x \in A$ mamy $x^2 - x^2 = 0 = 5 \cdot 0$, zatem xRx;
symetryczna: dla dowolnych $x, y \in A$, jeśli xRy, czyli $x^2 - y^2 = 5k$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, to $y^2 - x^2 = 5 \cdot (-k)$ i $-k \in \mathbb{Z}$, zatem yRx;
przechodnia: dla dowolnych $x, y, z \in A$, jeśli xRy i yRz, czyli $x^2 - y^2 = 5k$ i $y^2 - z^2 = 5l$ dla pewnych $k, l \in \mathbb{Z}$, to $x^2 - z^2 = (x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) = 5(k+l)$ i $k + l \in \mathbb{Z}$, zatem xRz.

Relacja S nie jest relacją równoważności, gdyż nie jest przechodnia. Istotnie, wprawdzie $2S1$ i $1S4$, ale $\neg 2S4$.

(b) $[2]_R = \{2, 3, 7, 8\}$.

(c) Ponieważ $A/_R = \{X_0, X_1, X_2\}$, gdzie $X_0 = \{0, 5, 10\}$, $X_1 = \{1, 4, 6, 9\}$, $X_2 = \{2, 3, 7, 8\}$, więc $|A/_R| = 3$. Można też zauważyć, że wyabstrahowaną cechą liczby ze zbioru A jest reszta jej kwadratu w dzieleniu przez 5, a cecha ta może przyjmować dokładnie trzy wartości: 0, 1 i 4.

(d) Tak. Ponieważ $S = A^2 \setminus \{\langle 1,8\rangle, \langle 8,1\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 4,2\rangle\}$ i pary nienależące do S nie należą również do R (co łatwo sprawdzić, znając zbiór ilorazowy relacji R), więc $R \subseteq S$. Wobec tego $R \cap S = R$, a R jest relacją równoważności.
Można też sprawdzić z definicji, że relacja $R \cap S$ jest relacją równoważności – jest to rozwiązanie bardziej żmudne, a sprawdzając przechodniość tej relacji wykonujemy *de facto* to samo rozumowanie, co powyżej.

17. (a) Tak. Istotnie, jedynymi dzielnikami liczb 12 i 18 są liczby 2 i 3, zatem obie rozważane liczby mają te same dzielniki ze zbioru I. Wobec tego $12\,R\,18$, czyli $12 \in [18]_R$.

    (b) Nie. Istotnie, liczba 1 nie ma dzielnika ze zbioru I, a liczba 3 ma dzielnik ze zbioru I. Wobec tego $\neg 1 R\, 3$, co oznacza, że zbiór $\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}$ (do którego obie te liczby należą) nie może być klasą abstrakcji relacji R.

    (c) Nie. Ponieważ relacja R jest zwrotna i przechodnia, więc $R \circ R = R$. Relacja R nie może zaś być spójna, gdyż miałaby wtedy tylko jedną klasę abstrakcji (co, jak wiemy np. z a), nie ma miejsca). Można też (mniej elegancko) pokazać wprost z definicji złożenia relacji, że liczby np. 1 i 2 nie są porównywalne w sensie relacji $R \circ R$.

    (d) Ponieważ dwie liczby naturalne dodatnie są w relacji R dokładnie wtedy, gdy mają te same dzielniki ze zbioru I, więc cechą liczby naturalnej, wyabstrahowaną przy pomocy relacji R, jest zbiór tych jej dzielników, które należą do zbioru I. Możliwe wartości tej cechy to podzbiory zbioru I (każdej klasie abstrakcji odpowiada zbiór tych liczb ze zbioru I, które dzielą wszystkie elementy tej klasy). Wobec tego
    $$\left|\mathbb{N}^+/_R\right| = |\mathcal{P}(I)| = 16.$$

18. (a) Ponieważ funkcja φ nie jest nigdzie większa od zera, więc z definicji relacji R_0 wynika, że w relacji z nią są funkcje z $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, które również nigdzie nie są większe od zera. Ale innych takich funkcji nie ma, zatem $[\varphi]_{R_0} = \{\varphi\}$.

    (b) Zauważmy, iż z definicji relacji R_1 wynika, że
    $$\begin{aligned}[\varphi]_{R_1} &= \{f \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : (\forall n \in \mathbb{N})(f(n) > 1 \Leftrightarrow 0 > 1\} = \\ &= \{f \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : (\forall n \in \mathbb{N})(f(n) \leq 1\}.\end{aligned}$$
    Wobec tego $[\varphi]_{R_1} = \{0,1\}^\mathbb{N}$, skąd od razu otrzymujemy $|[\varphi]_{R_1}| = \mathfrak{c}$.

    (c) Nie. Z definicji złożenia relacji wynika, że $\psi\, R_1 \circ R_2\, \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $f \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, taka że $\psi\, R_2\, f$ i $f\, R_1\, \varphi$. Ale wiemy już z b), że $f\, R_1\, \varphi \Leftrightarrow f \in \{0,1\}^\mathbb{N}$. Z drugiej strony, jeśli $\psi\, R_2\, f$, to w szczególności dla $k \geq 3$ mamy $f(k) > 2$ (bo $\psi(k) > 2$), co pozostaje w sprzeczności z faktem $f \in \{0,1\}^\mathbb{N}$. Wobec tego poszukiwana funkcja f nie istnieje, zatem funkcja ψ nie może być w relacji $R_1 \circ R_2$ z funkcją φ.

(d) Zauważmy, że cechą funkcji $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, wyabstrahowaną przy pomocy relacji R_1, jest podzbiór zbioru $\mathbb{N}$, na którym przekracza ona wartość 1. Możliwe wartości tej cechy to podzbiory zbioru $\mathbb{N}$ (każdej klasie abstrakcji odpowiada podzbiór zbioru $\mathbb{N}$, na którym wszystkie funkcje z tej klasy są większe od 1). Wobec tego

$$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{R_1}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}.$$

Można, wykorzystując powyższe spostrzeżenie (choć do rozwiązania zadania nie jest to niezbędne), opisać zbiór ilorazowy relacji R_1:

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{R_1} = \{F_A : A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\},$$

gdzie $F_A = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : (\forall n \in \mathbb{N}) f(n) > 1 \Leftrightarrow n \in A\}$.
Inny sposób rozwiązania tego zadania jest bardziej „rachunkowy". Wprost z własności relacji równoważności wynika, że

$$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{R_1}| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$$

(istotnie, dla dowolnej relacji równoważności na zbiorze X nie może mieć ona więcej klas abstrakcji niż $|X|$, gdyż klasy abstrakcji są niepuste i rozłączne). Z drugiej strony, odwzorowanie $F : \{0,2\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{R_1}$ zadane wzorem $F(f) = [f]_{R_1}$ jest injekcją (innymi słowy, zbiór $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ jest zbiorem elementów parami nieporównywalnych względem relacji R_1). Faktycznie, jeśli $f_1, f_2 \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ i $f_1 \neq f_2$, to dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ mamy (bez zmniejszenia ogólności) $f_1(k) = 0$ i $f_2(k) = 2$. Ale wówczas dla tego k mamy $\neg(f_1(k) > 1 \Leftrightarrow f_2(k) > 1)$, zatem $\neg f_1 \, R_1 \, f_2$ i dalej $[f_1]_{R_1} \neq [f_2]_{R_1}$, co należało dowieść.
Różnowartościowość funkcji F oznacza, że

$$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{R_1}| \geq |\{0,2\}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$$

i z tw. Cantora-Bernsteina wnioskujemy, że $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{R_1}| = \mathfrak{c}$.

19. (a) Tak. Ustalmy bowiem dowolne $z \in \mathbb{Z}$. Wtedy $\langle 0, -z\rangle \in \mathbb{Z}^2$ oraz $f(0,-z) = 0^2 - (-z) = z$.

(b) Z definicji klasy abstrakcji mamy

$$[\langle 0,0\rangle]_R = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{Z}^2 : f(x,y) = f(0,0) = 0\},$$

czyli $[\langle 0,0\rangle]_R = \{\langle x,x^2\rangle : x \in \mathbb{Z}\}$.

(c) Z definicji obrazu funkcji mamy

$$f\,[[\langle 2,-3\rangle]_R] = \{f(x,y) : \langle x,y\rangle \in [\langle 2,-3\rangle]_R\}.$$

Ponieważ dla każdego $\langle x,y\rangle \in [\langle 2,-3\rangle]_R$ mamy $f(x,y) = f(2,-3) = 7$, więc $f\,[[\langle 2,-3\rangle]_R] = \{7\}$.

(d) Funkcja $f \restriction A$ jest różnowartościowa. Gdyby bowiem istniały dwie różne pary $\langle x,y\rangle, \langle a,b\rangle \in A$ takie, że $f(x,y) = f(a,b)$, to obie należałyby do tej samej klasy abstrakcji, wbrew założeniu o zbiorze A.
Funkcja $f \restriction A$ może, ale nie musi być „na". Jeśli bowiem istnieje klasa abstrakcji $[\langle x,y\rangle]_R$ rozłączna ze zbiorem A (czego założenie nie wyklucza), to wartość $f(x,y)$ nie należy do obrazu funkcji $f \restriction A$. Z drugiej strony, jeśli zbiór A z każdą klasą abstrakcji relacji R ma dokładnie jeden wspólny element, to z faktu, że funkcja f jest surjekcją wynika, że funkcja $f \restriction A$ również jest surjekcją (istotnie, dla dowolnego $z \in \mathbb{Z}$ istnieje $\langle x,y\rangle \in \mathbb{Z}^2$ takie, że $f(x,y) = z$. Niech $\langle a,b\rangle \in [\langle x,y\rangle]_R \cap A$. Wtedy $\langle a,b\rangle \in A$ i $(f \restriction A)(a,b) = f(x,y) = z$).

(e) Badamy, ile różnych wartości przyjmuje funkcja f na zbiorze $\{0,1,2\}^2$. Ponieważ $f(0,0) = f(1,1) = 0$, $f(0,1) = f(1,2) = -1$, $f(0,2) = -2$, $f(1,0) = 1$, $f(2,0) = 4$, $f(2,1) = 3$, $f(2,2) = 2$, więc

$$|X^2/_{R \restriction X^2}| = 7.$$

20. (a) Nie. Istotnie, $\pi_1[C] = \mathbb{R} \setminus \{0\} \neq \mathbb{R} = \pi_1[\mathbb{R}^2]$, czyli $\neg C\,R\,\mathbb{R}^2$.

(b) Np. $D = \mathbb{R} \times \{0,1\}$.

(c) Z definicji klasy abstrakcji mamy

$$[\{\langle 0,0\rangle\}]_R = \{A \subseteq \mathbb{R}^2 : \pi_1[A] = \pi_1[\{\langle 0,0\rangle\}] = \{0\}\}.$$

Wobec tego $[\{\langle 0,0\rangle\}]_R = \mathcal{P}(\{0\} \times \mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}$.

(d) Nie. Zauważmy, że $F \in [E \times \mathbb{N}]_R$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi_1[F] = E$. Z drugiej strony wiemy, że $|\pi_1[F]| \leq |F|$, skąd wnioskujemy, że $|F| \leq |E| > \aleph_0$.

21. (a) Niech ciąg $\langle d_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ będzie zadany warunkami $d_0 = 0$, $d_n = 1$ dla $n \geq 1$. Wówczas $\langle d_n : n \in \mathbb{N}\rangle T \langle c_n : n \in \mathbb{N}\rangle$, czyli $[\langle c_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_T = [\langle d_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_T$.

(b) Zauważmy, że cechą ciągu liczb naturalnych, wyabstrahowaną przy pomocy relacji T, jest jego pierwszy wyraz. Zatem klasy abstrakcji relacji T są wyznaczane przez możliwe wartości tej cechy, czyli przez liczby naturalne. Wobec tego

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_T = \{A_k : k \in \mathbb{N}\},$$

gdzie $A_k = \{\langle a_n : n \in \mathbb{N}\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : a_0 = k\}$.

(c) Wprost z (b) otrzymujemy $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_T| = \aleph_0$. Istotnie, sprawdzenie, że funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_T$, zadana wzorem $f(k) = A_k$ jest bijekcją nie powinno nastręczać większych problemów.

(d) Niech $\varphi : [\langle c_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_T \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie funkcją zadaną wzorem

$$\varphi(\langle a_n : n \in \mathbb{N}\rangle) = \langle a_{n+1} : n \in \mathbb{N}\rangle.$$

Funkcja φ jest injekcją, gdyż jeśli dwa ciągi $\langle a_n : n \in \mathbb{N}\rangle$, $\langle b_n : n \in \mathbb{N}\rangle$, należące do $[\langle c_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_T$ różnią się m-tym wyrazem, to $m > 0$ (bo $a_0 = b_0$), zatem ciągi $\langle a_{n+1} : n \in \mathbb{N}\rangle$, $\langle b_{n+1} : n \in \mathbb{N}\rangle$ będą różnić się tym samym wyrazem.
Funkcja φ jest też surjekcją. Istotnie, ustalmy dowolny ciąg $\langle e_n : n \in \mathbb{N}\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Wówczas ciąg $\langle f_n : n \in \mathbb{N}\rangle$, zadany warunkami $f_0 = c_0$, $f_n = e_{n-1}$ dla $n \geq 1$ należy do $[\langle c_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_T$ i

$$\varphi(\langle f_n : n \in \mathbb{N}\rangle) = \langle e_n : n \in \mathbb{N}\rangle.$$

Zatem $[\langle c_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_T \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, czyli $|[\langle c_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_T| = \mathfrak{c}$.
Warto zauważyć, że w istocie w powyższym dowodzie nie korzystaliśmy z definicji ciągu $\langle c_n : n \in \mathbb{N}\rangle$. Wobec tego pokazaliśmy, że **każda** klasa abstrakcji relacji T ma moc continuum.

22. (a) Nie. Gdyby $\{1, 2, 4\} + x = \{5, 7, 8\}$ dla pewnego $x \in \mathbb{Z}$, to $1 + x = 5$ i $2 + x = 7$ (przesunięcie zachowuje porządek elementów w zbiorze), skąd $x = 6$ i $x = 5$, sprzeczność.

(b) Tak. Ta klasa to $\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4\}$, gdzie $A_i = \{5k + i : k \in \mathbb{Z}\}$ (dla $i = 0, \ldots, 4$).

(c) Zauważmy, że dowolne dwa zbiory jednoelementowe są ze sobą w relacji (dla $\{a\}, \{b\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ mamy $\{a\} + (b - a) = \{b\}$). Wobec tego wszystkie singletony są w tej samej klasie abstrakcji, czyli

$$|\{\mathcal{A} \in (\mathcal{P}(\mathbb{Z}))/_R : (\forall B \in \mathcal{A})|B| = 1\}| = 1.$$

(d) Ponieważ dwuelementowych podzbiorów zbioru liczb całkowitych jest przeliczalnie wiele, więc klas abstrakcji relacji R, które składają się z takich zbiorów jest co najwyżej przeliczalnie wiele. By zakończyć dowód wystarczy zatem pokazać, że jest nieskończenie wiele parami nierównoważnych dwuelementowych podzbiorów zbioru liczb całkowitych (bo każdy z nich będzie wyznaczał inną klasę abstrakcji relacji R). By to zrobić zauważmy, że dwa dwuelementowe zbiorów są ze sobą w relacji dokładnie wtedy, gdy ich elementy są od siebie równoodległe, czyli

$$\{a, b\} \, R \, \{c, d\} \Leftrightarrow |a - b| = |c - d|.$$

Wobec tego rodzina $\{\{0, n\} : n \in \mathbb{N}^+\}$ jest nieskończoną rodziną parami nierównoważnych dwuelementowych podzbiorów zbioru liczb całkowitych.

(e) Mamy (por. rozwiązanie zadania 18(d))

$$|\mathcal{P}(\mathbb{Z})/_R| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Z})| = \mathfrak{c}.$$

Rozważmy teraz rodzinę $\mathcal{A} = \{\{0\} \cup A : A \subseteq \mathbb{N}^+\}$. Oczywiście $|\mathcal{A}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)| = \mathfrak{c}$. Ponadto, ponieważ przesunięcie zachowuje porządek elementów w zbiorze, więc elementy rodziny $\mathcal{A}$ są parami nierównoważne (względem relacji R) – wszystkie mają ten sam najmniejszy element, zatem żadne niezerowe przesunięcie nie może przeprowadzać jednego z nich na drugi. Wobec tego funkcja $f : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})/_R$ zadana wzorem $f(B) = [B]_R$ jest injekcją. Zatem

$$|\mathcal{P}(\mathbb{Z})/_R| \geq |\mathcal{A}| = \mathfrak{c}.$$

Na mocy tw. Cantora-Bernsteina otrzymujemy $|\mathcal{P}(\mathbb{Z})/_R| = \mathfrak{c}$.

23. (a) Nie. Ponieważ $f(0) = -1 < 0$ i $g(0) = 0$, więc $\neg f \, R \, g$, czyli $[f]_R \neq [g]_R$.

(b) Mamy

$$\varphi \in [h]_R \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(\varphi(n) \geq 0 \Leftrightarrow (-1)^n \geq 0),$$

zatem

$$[h]_R = \{\varphi \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} : (\forall n \in \mathbb{N})\varphi(2n) \geq 0 \wedge \varphi(2n+1) < 0\}.$$

(c) Szukanym zbiorem maksymalnej mocy może być np. zbiór

$$A = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}.$$

Jeśli bowiem $f, g \in A$ są takie, że $f \neq g$, to istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $f(n) \neq g(n)$. Ale to oznacza, że wartości $f(n)$ i $g(n)$ są różnych znaków, czyli $\neg f\, R\, g$.

24. (a) Nie. Ponieważ $\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}, \{1\} \nsubseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, więc

$$\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}\, R\, \{1\} \Leftrightarrow \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{N} = \{1\} \cap \mathbb{N},$$

co, oczywiście, nie ma miejsca.

(b) Wystarczy zauważyć, że jeśli $C \subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, to $[C]_R = \{C\}$. Zatem np. dla $C = \{-1\}$ mamy $|[C]_R| = 1 < \aleph_0$.

(c) Ponieważ

$$\{x \in \mathbb{Z} : |x+1| \leq 1\} = \{-2, -1, 0\} \nsubseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N},$$

więc

$$D \in [\{x \in \mathbb{Z} : |x+1| \leq 1\}]_R \Leftrightarrow D \cap \mathbb{N} = \{-2, -1, 0\} \cap \mathbb{N} = \{0\}.$$

Zatem np. $D = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^+$.

(d) Ponieważ $A\, R\, \mathbb{Z} \Leftrightarrow A \cap \mathbb{N} = \mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$, więc

$$[\mathbb{Z}]_R = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) : \mathbb{N} \subseteq A\}.$$

Zauważmy teraz, że

$$\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) : \mathbb{N} \subseteq A\} = \{\mathbb{N} \cup B : B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})\}.$$

Określmy funkcję $f : \mathcal{P}(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \to \{\mathbb{N} \cup B : B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})\}$ wzorem $f(B) = \mathbb{N} \cup B$. W prosty sposób możemy sprawdzić, że jest ona bijekcją. Wobec tego

$$|[\mathbb{Z}]_R| = |\mathcal{P}(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}.$$

(e) Z jednej strony wiemy (por. rozwiązanie zadania 18(d)), że

$$|\mathcal{P}(\mathbb{Z})/_R| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Z})| = \mathfrak{c}.$$

Z drugiej strony zauważmy, że jeśli $A, B \subseteq \mathbb{N}$ i $A \neq B$, to $\neg A\, R\, B$ (bo $A \cap \mathbb{N} = A \neq B = B \cap \mathbb{N}$). Wobec tego różne podzbiory zbioru liczb naturalnych wyznaczają różne klasy abstrakcji relacji R (dokładniej: funkcja $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})/_R$ zadana wzorem $f(A) = [A]_R$ jest injekcją), czyli

$$|\mathcal{P}(\mathbb{Z})/_R| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}.$$

Na mocy tw. Cantora-Bernsteina otrzymujemy $|\mathcal{P}(\mathbb{Z})/_R| = \mathfrak{c}$.

25. (a) Ponieważ $[\emptyset]_R = \{A \in \mathcal{P}(X) : f[A] = f[\emptyset] = \emptyset$, więc $[\emptyset]_R = \{\emptyset\}$ (bo żaden niepusty zbiór nie może mieć pustego obrazu).

(b) Tak. Pytamy bowiem, czy istnieje zbiór $A \subseteq X$ taki, że $\{3, 6\}\, R\, A$ i $A\, S\, \{4\}$, czyli taki, że

$$f[A] = f[\{3, 6\}] = \{3, 4\} \text{ i } f^{-1}[A] \subseteq f^{-1}[\{4\}] = \{6\}.$$

Drugi z tych warunków oznacza, że $A \subseteq \{4, 5, 6\}$. Ponieważ dla $A = \{4, 6\}$ spełniony jest także pierwszy warunek, więc odpowiedź na nasze pytanie jest pozytywna.

(c) Zauważmy, że cechą podzbioru zbioru X, wyabstrahowaną przy pomocy relacji R, jest jego obraz przez funkcję f. Ponieważ $\operatorname{rng}(f) = \{1, 2, 3, 4\}$, więc wartości wyabstrahowanej cechy to podzbiory zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$. Wobec tego

$$|\mathcal{P}(X)/_R| = |\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})| = 16.$$

Inną metodą rozwiązania tego zadania może być opisanie zbioru $\mathcal{P}(X)/_R$. Należy jednak uważać – przy opisywaniu tego zbioru „na piechotę” (poprzez wypisanie i pogrupowanie wszystkich podzbiorów zbioru X) bardzo łatwo się pomylić. Dlatego lepiej wykorzystać taki opis:

$$\mathcal{P}(X)/_R = \{\mathcal{A}_D : D \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})\},$$

gdzie $\mathcal{A}_D = \{A \subseteq X : f[A] = D\}$ (co jednak w gruncie rzeczy jest tylko lekką modyfikacją pierwszej metody rozwiązania).

(d) Łatwo możemy sprawdzić, korzystając z własności przeciwobrazu, że relacja S (zatem także każde jej obcięcie) jest relacją zwrotną i przechodnią. Wobec tego musimy znaleźć największy (w sensie zawierania) zbiór $C \subseteq X$, dla którego relacja $S \restriction C$ jest słabo antysymetryczna (bo tylko tej własności relacji porządku brakuje relacji S). Przypuśćmy, że dla pewnych zbiorów $A, B \subseteq X$ zachodzi $A\, S\, B$ i $B\, S\, A$, czyli

$$f^{-1}[A] \subseteq f^{-1}[B] \text{ i } f^{-1}[B] \subseteq f^{-1}[A].$$

Zatem $f^{-1}[A] = f^{-1}[B]$. Stąd $f[f^{-1}[A]] = f[f^{-1}[B]]$, czyli $A \cap \operatorname{rng}(f) = B \cap \operatorname{rng}(f)$. Z równości tej wynika równość zbiorów A i B pod warunkiem, że $A, B \subseteq \operatorname{rng}(f)$. Wobec tego

$$C = \operatorname{rng}(f) = \{1, 2, 3, 4\}.$$

26. (a) Tak. Dwa przedziały są nieporównywalne, gdy jeden zawiera się w drugim i mają oba końce różne, zatem przykładem może być np. $J = (-1, 3)$.
    (b) Przykładem antyłańcucha może być np. zbiór $\mathcal{A} = \{(-a, a) : a \in (0, +\infty)\}$.
    (c) Przykładem łańcucha może być np. zbiór $\mathcal{L} = \{(0, n) : n \in \mathbb{N}\}$.
    (d) Nie. Istotnie, jeśli $(a, b) \in A$, to $\left(\frac{a+b}{2}, 1\right) \in A$ i $(a, b) \prec \left(\frac{a+b}{2}, 1\right)$.

27. (a) Nie. Zauważmy bowiem, że $x \leq_1 y \Leftrightarrow y \leq x$ (czyli $\leq_1$ jest po prostu odwróconym porządkiem na zbiorze $\mathbb{R}$). Zatem $\pi <_1 3$.
    (b) Tak. Ponieważ standardowy porządek na zbiorze liczb rzeczywistych jest liniowy, więc po odwróceniu pozostanie liniowy.
    (c) Np. $B = (2, 3)$.
    (d) Tak. Istotnie, ustalmy dowolne $x, y \in \mathbb{N}$. Mamy

$$\begin{aligned} x \leq_2 y \Leftrightarrow x \leq_1 y \Leftrightarrow (\forall z \in \mathbb{R})(x < z \Rightarrow y < z) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\forall z \in \mathbb{N})(x < z \Rightarrow y < z). \end{aligned}$$

    Z drugiej strony, gdyby $(\forall z \in \mathbb{N})(x < z \Rightarrow y < z)$, ale istniałoby $t \in \mathbb{R}$, takie że $x < t$ i $t \leq y$, to $x < y$ i otrzymujemy sprzeczność z założeniem dla $z = y$.

28. (a) Np. $\{\langle n, 0\rangle : n \in \mathbb{N}\}$, albo opisany w (b) zbiór elementów minimalnych (kluczowe jest dostrzeżenie różnicy pomiędzy porządkiem $\preceq$ a zwykłym porządkiem produktowym).
    (b) $\{\langle n, 0\rangle : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle 0, n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$.
    (c) Nie. Przypuśćmy bowiem, że taki nieskończony łańcuch L istnieje. Ponieważ rzut $\pi[L]$ jest zbiorem skończonym, więc istnieje $x_0 \in \pi[L]$, takie że zbiór $A = \{\langle x, y\rangle \in L : x = x_0\}$ jest nieskończony (wynika to z zasady szufladkowej – w przeciwnym przypadku zbiór L byłby skończony). Ale zbiór $A \subseteq L$ jest antyłańcuchem, sprzeczność.

29. (a) Nie. Gdyby $(0,1) \prec (a,b) \prec (1,2)$, to ponieważ z definicji relacji $\preceq$ wynika, że $I \prec J \Leftrightarrow \sup I \leq \inf J$, więc mielibyśmy $1 \leq a$ i $b \leq 1$, co jest sprzeczne z założeniem, że $a < b$.

   (b) Nie. Wystarczy zauważyć, że każdy odcinek $(a,1)$, gdzie $a < 1$, jest elementem maksymalnym w $\mathcal{P}((-\infty,1)) \cap X$.

   (c) Ponieważ dwa odcinki są nieporównywalne dokładnie wtedy, gdy nie są rozłączne, więc w szukanym antyłańcuchu każde dwa odcinki muszą mieć niepusty przekrój. Warunek $\bigcap_{I \in \mathcal{A}} I = \emptyset$ najprościej osiągnąć rozważając rodzinę zstępującą (względem zawierania). Przykładowa odpowiedź to

$$\mathcal{A} = \left\{ \left(0, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

   (d) Nie. Ponieważ porównywalność dwóch różnych odcinków oznacza ich rozłączność, więc istnienie nieprzeliczalnego łańcucha oznaczałoby istnienie nieprzeliczalnej rodziny parami rozłącznych odcinków na prostej, co, jak wiadomo, jest niemożliwe.

30. (a) Nie. Gdyby $2 \preceq 12$, to istniałaby liczba naturalna k, taka że $12 = 2^{k+1}$, co nie jest możliwe.

   (b) Nie. Wystarczy pokazać, że dla dowolnego $x \in \mathbb{N}^+$ potrafimy wskazać $y \in \mathbb{N}^+$ takie, że $x \prec y$. Ustalmy zatem $x \in \mathbb{N}^+$. Jeśli $\neg 2|x$, to $\neg 2|(x+2)$ i $x \leq x+2$, zatem $x \prec x+2$. Jeśli natomiast $2|x$, to $2|2x$ i $2x = 2^1 \cdot x$, zatem $x \prec 2x$, co kończy dowód.

   (c) Niech *Odd* będzie zbiorem liczb nieparzystych. Wówczas zbiór $\{2x : x \in Odd\}$ jest przykładem szukanego antyłańcucha.

   (d) Nie. Wynika to z faktu, że zbiór $\mathbb{N}^+$ jest sumą parami rozłącznych łańcuchów:

$$\mathbb{N}^+ = Odd \cup \bigcup_{n \in Odd} \{2^k n : k \in \mathbb{N}\}.$$

   Nie istnieją zatem dwa różne elementy, mające ten sam bezpośredni następnik.

31. (a) Nie, ponieważ $7 \prec 9 \Leftrightarrow f^{-1}(7) \leq f^{-1}(9) \Leftrightarrow -4 \leq -5$.

   (b) Nie. Zbiór uporządkowany $\langle \mathbb{N}, \preceq \rangle$ jest izomorficzny ze zbiorem uporządkowanym $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ (funkcja f jest izomorfizmem). Wobec tego porządek $\preceq$ jest liniowy (bo porządek $\leq$ jest), co oznacza, że nie ma dwóch nieporównywalnych elementów (a różne elementy maksymalne są nieporównywalne).

(c) Np. $\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\} \cup \{4\}$.

(d) Skorzystamy z własności $(g \circ f)^{-1}[C] = f^{-1}\left[g^{-1}[C]\right]$. Mamy

$$g^{-1}[C] = \{n \in \mathbb{N} : g(n) \in C\} = \{n \in \mathbb{N} : f(n) \in C\} = \\ = \{n \in \mathbb{N} : 2n \in C\} = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 50\}.$$

Dalej mamy

$$f^{-1}[\{n \in \mathbb{N} : n \leq 50\}] = \{k \in \mathbb{Z} : f(k) \leq 50\}.$$

Stąd otrzymujemy $(g \circ f)^{-1}[C] = \{k \in \mathbb{Z} : |k| \leq 25\}$.

32. (a) (i)

(ii) $\sup A = \langle 12, 2\rangle$.

(b) Nie. Dla dowolnej pary $\langle a, b\rangle \in (\mathbb{N}^+)^2$ mamy bowiem $\langle a, b\rangle \prec \langle 2a, b\rangle$.

(c) Np. $\{\langle 2, 2\rangle\} \cup \{\langle 2^k, 1\rangle : k \in \mathbb{N}^+\}$.

33. (a) Elementem najmniejszym (i w związku z tym jedynym elementem minimalnym) jest funkcja stała, zadana wzorem $f(n) = 0$. Element maksymalny (a zatem również element największy) nie istnieje, ponieważ dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ możemy zdefiniować funkcję $\psi \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ wzorem $\psi(n) = \varphi(n) + 1$. Wówczas mamy $(\forall n \in \mathbb{N})(\varphi(n) < \psi(n))$, skąd wnioskujemy, że $\varphi \prec \psi$.

(b) Najprościej wziąć funkcje stałe. Jeśli zatem funkcję $f_a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ zadamy wzorem $f_a(n) = a$, to szukanym łańcuchem może być zbiór $L = \{f_a : a \in \mathbb{N}\}$.

(c) Przyjmijmy oznaczenie $A = \{f \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : f \preceq h\}$. Wówczas $\{0,1\}^\mathbb{N} \subseteq A$. Istotnie, ponieważ $(\forall n \in \mathbb{N})h(n) \geq 1$, więc dla każdej funkcji

$g \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mamy $(\forall n \in \mathbb{N}) h(n) \geq g(n)$, czyli $g \preceq h$. Ponadto $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Wobec tego mamy

$$\mathfrak{c} = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leq |A| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$$

i z tw. Cantora-Bernsteina wnioskujemy, że $|A| = \mathfrak{c}$.

34. (a) Tak. Np. $\frac{10}{3} \prec \frac{2}{5} \prec \frac{5}{2}$.

    (b) Nie. Ponieważ dwie liczby o tej samej części ułamkowej są nieporównywalne, więc w szczególności zbiór $\mathbb{Z}$ jest zbiorem elementów minimalnych.

    (c) Ponieważ elementy maksymalne muszą mieć tę samą część ułamkową, więc wybieramy dwie liczby o niezerowej części ułamkowej i dorzucamy sporo liczb o mniejszych częściach ułamkowych, otrzymując np. $\mathbb{Z} \cup \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$.

    (d) Nie. Zauważmy bowiem, że dwie liczby są nieporównywalne wtedy i tylko wtedy, gdy mają tę samą część ułamkową. Tymczasem dla ustalonej liczby $a \in [0,1)$ zbiór tych liczb rzeczywistych, które mają część ułamkową równą a, ma postać $\{n + a : n \in \mathbb{Z}\}$ i jest przeliczalny.

35. (a) Punkty, leżące na kołach o mniejszych promieniach są mniejsze od tych, które leżą na kołach o mniejszych promieniach. Zatem zbiór elementów minimalnych to $\{\langle 0,0 \rangle\}$ (punkt $\langle 0,0 \rangle$ jest elementem najmniejszym).

    (b) Podzbiór płaszczyzny będzie łańcuchem, gdy z każdym okręgiem o środku w punkcie $\langle 0,0 \rangle$ będzie miał co najwyżej jeden punkt wspólny. Maksymalny będzie wówczas, gdy z każdym takim okręgiem będzie miał punkt wspólny. Zatem maksymalne łańcuchy to m. in. półproste domknięte o początku w punkcie $\langle 0,0 \rangle$, np. $L = \{\langle 0,x \rangle : x \in [0,+\infty)\}$.

    (c) Nie. Jeśli punkt $\langle a,b \rangle$ jest ograniczeniem górnym zbioru A, to $a^2 + b^2 > 1^2 + 1^2 = 2$. Ale wtedy każdy punkt $\langle c,d \rangle$, taki że $a^2 + b^2 > c^2 + d^2 > 2$, jest ograniczeniem górnym zbioru A i $\langle c,d \rangle \prec \langle a,b \rangle$. Wobec tego w zbiorze ograniczeń górnych zbioru A nie można znaleźć elementu najmniejszego.

    (d) Tak. Jedyną niepustą relacją, która jest równocześnie relacją równoważności i relacją porządku jest relacja równości. Relacja $\preceq$ po obcięciu do zbioru B staje się relacją równości dokładnie wtedy, gdy zbiór ten jest antyłańcuchem. Zatem w zadaniu pytamy się tak naprawdę o istnienie nieskończonego antyłańcucha. A taki oczywiście istnieje – przykładem jest każdy okrąg o środku w punkcie $\langle 0, 0 \rangle$.

Bibliografia

[1] Cichoń J.: *Wykłady ze Wstępu do Matematyki.* Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 2003.

[2] Kraszewski J.: *Wstęp do matematyki.* WNT, Warszawa 2007.

[3] Just W., Weese M.: *Discovering Modern Set Theory I: The Basics.* Graduate Studies in Mathematics, Vol 8, AMS, Providence 1996.

[4] Guzicki W., Zakrzewski P.: *Wykłady ze wstępu do matematyki. Wprowadzenie do teorii mnogości.* WN PWN, Warszawa 2005.

[5] Guzicki W., Zakrzewski P.: *Wstęp do matematyki. Zbiór zadań.* WN PWN, Warszawa 2005.

[6] Kuratowski K., *Wstęp do teorii mnogości i topologii.* WN PWN, Warszawa 2004.

[7] Ławrow I.A., Maksimowa Ł.L.: *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów.* WN PWN, Warszawa 2004.

[8] Marek W., Onyszkiewicz J., *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach.* WN PWN, Warszawa 2004.

[9] Rasiowa H.: *Wstęp do matematyki współczesnej.* WN PWN, Warszawa 2004.