

Matematyka

dla I roku biotechnologii

Skrypt w wersji przystępnej
dla osób po maturze na poziomie podstawowym

na podstawie wykładu Pawła Zapałowskiego

Spis treści

0	Zanim zaczniemy	3
0.1	Jak korzystać z tego skryptu	3
0.2	Przypomnienie z liceum	3
1	Pojęcia wstępne	6
1.1	Kwantyfikatory	6
1.2	Zbiory. Działania na zbiorach	6
2	Elementy algebry liniowej	8
2.1	Macierze. Działania na macierzach	8
2.2	Wyznaczniki. Macierze odwrotne	10
2.3	Układy równań liniowych	13
3	Funkcje rzeczywiste zmiennej rzeczywistej	18
3.1	Funkcje. Pojęcia wstępne	18
3.2	Wielomiany. Funkcje wymierne	19
3.3	Funkcje trygonometryczne	21
3.4	Funkcja potęgowa. Funkcja wykładnicza	23
3.5	Funkcja logarytmiczna	24
3.6	Złożenie funkcji i funkcja odwrotna	26
3.7	Funkcje cyklometryczne	27
3.8	Ciągi. Granica ciągu	28
3.9	Liczba e	31
4	Elementy rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej	32
4.1	Granica funkcji. Ciągłość funkcji	32
4.2	Granice niewłaściwe. Granice w nieskończoności. Asymptoty	33
4.3	Pochodna funkcji	34
4.4	Przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji	37
4.5	Wklęsłość, wypukłość i punkty przegięcia	39
4.6	Reguła de l'Hospitala	40
4.7	Badanie przebiegu zmienności funkcji	41
5	Całka funkcji jednej zmiennej	44
5.1	Funkcja pierwotna (całka nieoznaczona)	44
5.2	Metody całkowania	45
5.3	Całka oznaczona	46
5.4	Zastosowania całki oznaczonej	48

6	Funkcje dwóch zmiennych	50
6.1	Zbiory na płaszczyźnie. Dziedzina i wykres	50
6.2	Pochodne cząstkowe	51
6.3	Ekstrema funkcji dwóch zmiennych	52
7	Całka funkcji dwóch zmiennych	55
7.1	Całka podwójna i jej interpretacja	55
7.2	Obliczanie całek podwójnych	55
7.3	Zastosowania całek podwójnych	57

0. Zanim zaczniemy

0.1. Jak korzystać z tego skryptu

Ten skrypt obejmuje ten sam materiał co wykład, ale jest napisany z myślą o osobach, które ostatni raz miały do czynienia z matematyką na maturze podstawowej. Dlatego:

- każde nowe pojęcie poprzedza krótka **intuicja** – zdanie lub dwa o tym, *po co* jest to pojęcie i jak je sobie wyobrazić;
- przykłady są rozpisane **krok po kroku**, bez pomijania „oczywistych” przekształceń;
- w ramach **Przypomnienie z liceum** są wzory, które warto odświeżyć przed czytaniem dalej;
- w ramach **W laboratorium** pokazujemy, gdzie dane pojęcie pojawia się w biologii, chemii i biotechnologii;
- ramki **Typowy błąd** ostrzegają przed pomyłkami, które co roku pojawiają się na kolokwiach;
- ramki **Dla chętnych** zawierają ścisłe definicje i uzasadnienia. Można je pominąć przy pierwszym czytaniu – reszta tekstu od nich nie zależy.

Zadania oznaczone gwiazdką ★ są trudniejsze. Zadania z zastosowaniami mają podane odpowiedzi, żeby można było sprawdzić wynik samodzielnie.

Intuicja: jak uczyć się matematyki

Matematyki nie da się nauczyć przez samo czytanie – tak jak nie da się nauczyć pipetowania, oglądając film. Po każdym przykładzie zakryj rozwiązanie i spróbuj zrobić go sam. Dopiero potem przejdź do zadań.

Literatura uzupełniająca. G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN 1995; W. Kryszicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, PWN 1996 (bardzo dużo rozwiązanych zadań – polecamy najbardziej); F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN 1978; A. Mostowski, M. Stark, *Elementy algebry wyższej*, PWN 1965.

0.2. Przypomnienie z liceum

Ten podrozdział zbiera rachunki, z których będziemy korzystać na każdym kroku. Jeśli któryś wzór wydaje się obcy, warto rozwiązać kilka zadań z końca podrozdziału, zanim pójdziesz dalej.

Przypomnienie z liceum: potęgi i pierwiastki

Dla $a, b > 0$ i dowolnych wykładników p, q :

$$a^p a^q = a^{p+q}, \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \quad (a^p)^q = a^{pq}, \quad (ab)^p = a^p b^p, \quad a^0 = 1, \quad a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Pierwiastek to potęga o wykładniku ułamkowym:

$$\sqrt{a} = a^{1/2}, \quad \sqrt[n]{a} = a^{1/n}, \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}.$$

Na przykład $\frac{x\sqrt{x}}{x^3} = \frac{x^1 \cdot x^{1/2}}{x^3} = x^{1+\frac{1}{2}-3} = x^{-3/2} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$. Takie zamiany (pierwiastek $\leftrightarrow$ potęga) będą potrzebne przy liczeniu pochodnych i całek.

Przypomnienie z liceum: wzory skróconego mnożenia

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2), \quad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

Przypomnienie z liceum: równanie kwadratowe

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Liczymy wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac$.

- $\Delta > 0$: dwa rozwiązania $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ i rozkład $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;
- $\Delta = 0$: jedno rozwiązanie $x_0 = -\frac{b}{2a}$ i $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$;
- $\Delta < 0$: brak rozwiązań rzeczywistych; trójmianu nie da się rozłożyć na czynniki liniowe.

Wykres $y = ax^2 + bx + c$ to parabola z ramionami w górę dla $a > 0$ i w dół dla $a < 0$; jej wierzchołek ma pierwszą współrzędną $-\frac{b}{2a}$.

Przykład 0.2.1. Rozwiążmy nierówność $2x^2 - x - 3 \leq 0$.

Krok 1. $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 + 24 = 25$, $\sqrt{\Delta} = 5$.

Krok 2. $x_1 = \frac{1-5}{4} = -1$, $x_2 = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2}$.

Krok 3. Parabola ma ramiona w górę ($a = 2 > 0$), więc jest pod osią x (lub na niej) między pierwiastkami.

Odpowiedź: $x \in [-1, \frac{3}{2}]$.

Przypomnienie z liceum: wartość bezwzględna

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

$|x|$ to odległość liczby x od zera na osi liczbowej; $|x - a|$ to odległość x od a . Stąd na przykład $|x - 2| < 3 \iff -3 < x - 2 < 3 \iff -1 < x < 5$. Ponadto $\sqrt{x^2} = |x|$ (a nie x !).

Przypomnienie z liceum: ułamki algebraiczne

Ułamki dodajemy, sprowadzając do wspólnego mianownika:

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2 - 1}.$$

Skracać wolno tylko *czynniki* (rzeczy pomnożone), nigdy składniki: $\frac{x+2}{x} \neq 2$, ale $\frac{x(x+2)}{x} = x+2$ dla $x \neq 0$.

Typowy błąd

$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\frac{1}{a+b} \neq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Każdą z tych „równości” łatwo obalić, wstawiając $a = b = 1$.

Oznaczenie sumy. Długie sumy zapisujemy skrótowo literą Σ (duża grecka sigma):

$$\sum_{i=1}^n a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad \text{np.} \quad \sum_{i=1}^4 i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30.$$

Symbol $:=$ czytamy „jest z definicji równe”.

Alfabet grecki. W matematyce i naukach przyrodniczych często używamy liter greckich: α (alfa), β (beta), γ (gamma), δ, Δ (delta), ε (epsilon), λ (lambda), μ (mi), π (pi), ρ (ro), σ, Σ (sigma), φ (fi), ψ (psi), ω (omega).

Zadanie 0.2.2. (1) Zapisz w postaci jednej potęgi x : $\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2}, \quad x^2\sqrt{x}, \quad \frac{1}{x\sqrt[4]{x}}.$

(2) Rozłóż na czynniki: $x^2 - 9, \quad x^2 - 6x + 9, \quad 2x^2 + x - 1, \quad x^3 - 8.$

(3) Rozwiąż: $x^2 - 5x + 6 = 0, \quad x^2 + x + 1 > 0, \quad 3 - 2x - x^2 \geq 0, \quad |2x - 1| \leq 5.$

(4) Oblicz $\sum_{k=1}^5 (2k - 1)$ i $\sum_{k=0}^3 2^k.$

1. Pojęcia wstępne

1.1. Kwantyfikatory

Intuicja

Kwantyfikatory to po prostu skróty myślowe – dwa symbole, które oszczędzają pisanie słów „dla każdego” i „istnieje”.

Zwrot „dla każdego x ” nazywamy **kwantyfikatorem dużym** i oznaczamy $\forall_x$ (od ang. *for All*). Zwrot „istnieje takie x , że” nazywamy **kwantyfikatorem małym** i oznaczamy $\exists_x$ (od ang. *there Exists*).

Przykład 1.1.1. Zdanie $\forall_{x \in \mathbb{R}} x^2 \geq 0$ czytamy: „dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi $x^2 \geq 0$ ” – jest prawdziwe. Zdanie $\exists_{x \in \mathbb{R}} x^2 = 2$ czytamy: „istnieje liczba rzeczywista, której kwadrat wynosi 2” – też jest prawdziwe ($x = \sqrt{2}$).

1.2. Zbiory. Działania na zbiorach

Zbiory oznaczamy zwykle dużymi literami (A, B, C), a ich elementy – małymi. Zapis $a \in A$ znaczy „ a jest elementem zbioru A ”, a $a \notin A$ – „ a nie jest elementem A ”. Zbiór bez elementów to **zbiór pusty** $\emptyset$.

Mówimy, że A jest **podzbiorem** B i piszemy $A \subset B$, jeśli każdy element A jest też elementem B . Dwa zbiory są równe, gdy $A \subset B$ i $B \subset A$.

Definicja 1.2.1. Dla zbiorów A, B określamy

- **sumę** $A \cup B := \{x : x \in A \text{ lub } x \in B\}$ – elementy, które są w którymkolwiek z nich;
- **iloczyn** (część wspólną) $A \cap B := \{x : x \in A \text{ i } x \in B\}$ – elementy, które są w obu;
- **różnicę** $A \setminus B := \{x : x \in A \text{ i } x \notin B\}$ – elementy A , których nie ma w B .

W laboratorium

Jeśli A to zbiór genów o podwyższonej ekspresji w tkance nowotworowej, a B – w tkance po leczeniu, to $A \cap B$ to geny „nadaktywne” w obu sytuacjach, a $A \setminus B$ to geny, których aktywność leczenie wyciszyło. Diagramy Venna, które widzisz w artykułach z genomiki, to właśnie rysunki sum, iloczynów i różnic zbiorów.

Będziemy używać oznaczeń:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ – liczby naturalne;
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ – liczby całkowite;
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$ – liczby wymierne (ułamki);
- $\mathbb{R}$ – liczby rzeczywiste (wszystkie punkty osi liczbowej, także $\sqrt{2}$, π itp.).

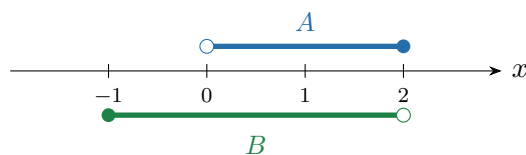
Zachodzą inkluzje $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Dla $A \subset \mathbb{R}$ piszemy też $A_+ := \{x \in A : x \geq 0\}$ oraz $A_* := \{x \in A : x \neq 0\}$, np. $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Definicja 1.2.2 (Przedziały). Dla $a < b$:

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && (\text{domknięty} - \text{końce należą}), \\ (a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && (\text{otwarty} - \text{końce nie należą}), \\ (a, b] &:= \{x : a < x \leq b\}, \quad [a, b) := \{x : a \leq x < b\} && (\text{jednostronnie otwarte}), \\ (a, \infty) &:= \{x : x > a\}, \quad (-\infty, b) := \{x : x < b\}, \quad (-\infty, \infty) = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Przy $\pm\infty$ zawsze stawiamy nawias okrągły – nieskończoność nie jest liczbą, więc nie może „należać” do przedziału.

Przykład 1.2.3. Niech $A = (0, 2]$, $B = [-1, 2)$. Najwygodniej narysować oba przedziały na jednej osi:



Pełne kółko oznacza, że koniec należy do przedziału, puste – że nie należy. Odczytujemy: $A \cup B = [-1, 2]$, $A \cap B = (0, 2)$, $A \setminus B = \{2\}$, $B \setminus A = [-1, 0]$.

Zadanie 1.2.4. Wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$, jeśli

- | | |
|---|---------------------------------------|
| (1) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, | (4) $A = (-1, 1)$, $B = \{-1, 1\}$, |
| (2) $A = \mathbb{Q}$, $B = \emptyset$, | (5) $A = \{0\}$, $B = (0, \infty)$, |
| (3) $A = \mathbb{Z}$, $B = [0, 1]$, | (6) $A = [1, 4)$, $B = (2, 6]$. |

2. Elementy algebry liniowej

Intuicja

Algebra liniowa to matematyka tabel liczb. Gdy w laboratorium mierzysz kilka wielkości dla kilku próbek, dostajesz tabelę – czyli *macierz*. Gdy kilka niewiadomych wiąże kilka prostych równań (np. bilans atomów w reakcji albo stężenia przy mieszaniu roztworów), dostajesz *układ równań liniowych*. Ten rozdział uczy, jak takie tabele dodawać, mnożyć i jak rozwiązywać takie układy.

2.1. Macierze. Działania na macierzach

Definicja 2.1.1. Macierzą wymiaru $m \times n$ nazywamy prostokątną tablicę liczb rzeczywistych ułożonych w m wierszy i n kolumn:

$$A = [a_{j,k}] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Liczba $a_{j,k}$ stoi w wierszu j i kolumnie k (najpierw wiersz, potem kolumna – jak w arkuszu kalkulacyjnym). Zbiór macierzy $m \times n$ oznaczamy $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Nazwy szczególnych macierzy:

- $m = 1$ – macierz **wierszowa**, $n = 1$ – macierz **kolumnowa**;
- $m = n$ – macierz **kwadratowa** stopnia n ;
- macierz złożona z samych zer – **macierz zerowa** 0;
- macierz kwadratowa z jedynkami na przekątnej i zerami poza nią – **macierz jednostkowa**

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dwie macierze są **równe**, jeśli mają ten sam wymiar i te same liczby na tych samych miejscach.

Definicja 2.1.2. Dla liczby t i macierzy $A = [a_{j,k}]$ określamy **iloczyn liczby przez macierz** $tA := [t a_{j,k}]$ – mnożymy każdy wyraz przez t . Dla macierzy A, B tego samego wymiaru określamy **sumę** $A + B := [a_{j,k} + b_{j,k}]$ (dodajemy wyrazy stojące na tych samych miejscach) oraz **różnicę** $A - B := A + (-1)B$.

Przykład 2.1.3.

$$\begin{aligned} -2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -6 & 12 & -4 \end{bmatrix}, \\ 3 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -8 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & -4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mnożenie macierzy jest mniej oczywiste. Zanim podamy definicję, zobaczmy, skąd się bierze.

W laboratorium: przygotowanie pożywek

Na 1 litr pożywki $\mathcal{A}$ potrzeba 10 g tryptonu, 5 g ekstraktu drożdżowego i 10 g NaCl, a na 1 litr pożywki $\mathcal{B}$ – odpowiednio 20 g, 10 g i 5 g. W poniedziałek przygotowujemy 2 L pożywki $\mathcal{A}$ i 1 L pożywki $\mathcal{B}$, we wtorek 1 L $\mathcal{A}$ i 3 L $\mathcal{B}$. Ile czego zużywamy każdego dnia?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{\text{plan: dni} \times \text{pożywki}} \underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 20 & 10 & 5 \end{bmatrix}}_{\text{skład: żywki} \times \text{składniki}}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 10 + 1 \cdot 20 & 2 \cdot 5 + 1 \cdot 10 & 2 \cdot 10 + 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot 10 + 3 \cdot 20 & 1 \cdot 5 + 3 \cdot 10 & 1 \cdot 10 + 3 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 25 \\ 70 & 35 & 25 \end{bmatrix}.$$

W poniedziałek zużyjemy więc 40 g tryptonu, 20 g ekstraktu i 25 g NaCl, we wtorek – 70 g, 35 g i 25 g. Każdy wyraz wyniku to „wiersz pierwszej macierzy razy kolumna drugiej”: mnożymy wyrazy parami i dodajemy.

Definicja 2.1.4. Jeśli $A \in \mathbb{R}^{m \times \ell}$ i $B \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$ (liczba kolumn A = liczba wierszy B), to **iloczynem** AB nazywamy macierz $C = [c_{j,k}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, gdzie

$$c_{j,k} := a_{j,1}b_{1,k} + a_{j,2}b_{2,k} + \cdots + a_{j,\ell}b_{\ell,k} = \sum_{i=1}^{\ell} a_{j,i}b_{i,k}.$$

Słownie: wyraz w wierszu j i kolumnie k iloczynu to suma iloczynów wyrazów j -tego wiersza A i k -tej kolumny B .

Intuicja: sprawdzanie wymiarów

$\underbrace{(m \times \ell)}_A \cdot \underbrace{(\ell \times n)}_B = \underbrace{(m \times n)}_{AB}$. Wewnętrzne liczby muszą być równe i „znikają”; zewnętrzne dają wymiar wyniku. Jeśli wewnętrzne się różnią, iloczyn nie istnieje.

Przykład 2.1.5. Wygodny jest zapis „na krzyż”: drugą macierz piszemy nad wynikiem, pierwszą – z lewej. Każdy wyraz wyniku stoi na przecięciu wiersza, z którego go liczymy, i kolumny, z której go liczymy.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Np. $c_{1,1} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5$, $c_{3,3} = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 9$.

Typowy błąd: kolejność ma znaczenie

Dla liczb $ab = ba$, ale dla macierzy na ogół $AB \neq BA$ – a często jeden z tych iloczynów w ogóle nie istnieje. Na przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uwaga 2.1.6. Macierz jednostkowa działa przy mnożeniu jak liczba 1: dla $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mamy $AI_n = I_m A = A$. Macierz zerowa działa przy dodawaniu jak liczba 0: $A + 0 = A$.

Definicja 2.1.7. Macierzą transponowaną do $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ nazywamy macierz $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$, której wierszami są kolumny A (w tej samej kolejności):

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2.1.8.

(1) Oblicz $-2 \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ oraz $-\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$.

(2) Oblicz (o ile istnieją)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} [1 \ 2 \ 3 \ 4], \quad [1 \ 2 \ 3 \ 4] \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} [1 \ 2 \ 3].$$

(3) Znajdź dwie macierze $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ takie, że $AB \neq BA$ (inne niż w ramce powyżej).

(4) ★Znajdź niezerowe macierze $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ takie, że $AB = 0$. Czy istnieje niezerowa $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, dla której $A^2 = 0$?

(5) Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Oblicz AA^T i $A^T A$.

(6) Wyznacz wszystkie macierze $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, dla których $A = A^T$.

Zadanie 2.1.9 (pożywki). Do składu pożywek z ramki dodajemy czwarty składnik: agar, 0 g/L w $\mathcal{A}$ i 15 g/L w $\mathcal{B}$. W środę przygotowujemy 3 L $\mathcal{A}$ i 2 L $\mathcal{B}$. Zapisz plan na trzy dni jako macierz 3×2 , skład jako macierz 2×4 i oblicz zużycie wszystkich składników przez iloczyn macierzy.

Odpowiedź: $\begin{bmatrix} 40 & 20 & 25 & 15 \\ 70 & 35 & 25 & 45 \\ 70 & 35 & 40 & 30 \end{bmatrix}$ (wiersze: dni, kolumny: trypton, ekstrakt, NaCl, agar, w gramach).

2.2. Wyznaczniki. Macierze odwrotne

Intuicja

Wyznacznik to jedna liczba przypisana macierzy *kwadratowej*. Najważniejsze, co mówi: czy jest równy zero, czy nie. Jeśli $\det A \neq 0$, to układ równań z macierzą A ma dokładnie jedno rozwiązanie i macierz A da się „odwrócić”. Jeśli $\det A = 0$, równania są w pewnym sensie „zależne” (jedno wynika z pozostałych albo im przeczy).

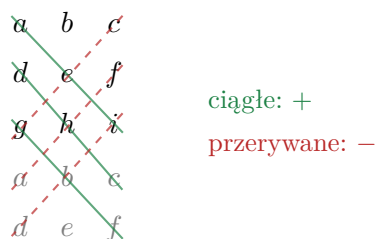
Wyznacznik macierzy A oznaczamy $\det A$ lub $|A|$ (pionowe kreski zamiast nawiasów kwadratowych – to *nie* jest wartość bezwzględna!).

Macierz 1×1 . $\det[a] = a$.

Macierz 2×2 . Iloczyn na przekątnej „głównej” minus iloczyn na „drugiej”:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \quad \text{Np.} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 2 + 3 = 5.$$

Macierz 3×3 – reguła Sarrusa. Dopisujemy pod macierzą jej dwa pierwsze wiersze. Trzy iloczyny wzdłuż przekątnych „w dół w prawo” bierzemy ze znakiem $+$, trzy iloczyny wzdłuż przekątnych „w dół w lewo” – ze znakiem $-$:



$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd.$$

Przykład 2.2.1.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \underbrace{(-1)(-4)(-2)}_{-8} + \underbrace{2 \cdot 1 \cdot 3}_6 + \underbrace{3 \cdot 0 \cdot (-2)}_0 \\ - \underbrace{3 \cdot (-4) \cdot 3}_{-36} - \underbrace{(-2) \cdot 1 \cdot (-1)}_2 - \underbrace{(-2) \cdot 0 \cdot 2}_0 = 32.$$

Typowy błąd

Reguła Sarrusa działa *tylko* dla macierzy 3×3 . Dla macierzy 4×4 i większych trzeba użyć rozwinięcia Laplace'a (ramka poniżej).

Uwaga 2.2.2. Wyznacznik jest równy zero, jeśli macierz ma wiersz (lub kolumnę) złożony z samych zer albo dwa jednakowe wiersze (lub dwie jednakowe kolumny).

Definicja 2.2.3. Niech $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 2$. **Podmacierz** $A_{j,k}$ nazywamy macierz powstałą z A przez skreślenie wiersza j i kolumny k . **Dopełnieniem algebraicznym** wyrazu $a_{j,k}$ nazywamy liczbę $d_{j,k} := (-1)^{j+k} \det A_{j,k}$.

Czynnik $(-1)^{j+k}$ to po prostu znak z „szachownicy” zaczynającej się od plusa w lewym górnym rogu: $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$.

Dla chętnych: rozwinięcie Laplace'a

Dla dowolnego n wyznacznik można obliczyć, „rozwijając” go względem dowolnego wiersza j :

$$\det A = a_{j,1}d_{j,1} + a_{j,2}d_{j,2} + \cdots + a_{j,n}d_{j,n}.$$

Wynik nie zależy od wyboru wiersza (można też rozwijać względem kolumny). Sprowadza to wyznacznik stopnia n do n wyznaczników stopnia $n-1$. Opłaca się wybierać wiersz z dużą liczbą zer. Formalnie tak właśnie definiuje się wyznacznik – indukcyjnie, zaczynając od $\det[a] = a$; wzory dla 2×2 i Sarrusa są szczególnymi przypadkami.

Zadanie 2.2.4. Oblicz

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Rząd macierzy. Rząd przyda się do rozstrzygnięcia, ile rozwiązań ma układ równań.

Definicja 2.2.5. Minorem stopnia k macierzy $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ nazywamy wyznacznik macierzy $k \times k$ otrzymanej z A przez skreślenie $m - k$ wierszy i $n - k$ kolumn. **Rzędem** niezerowej macierzy A nazywamy największy stopień niezerowego minora; oznaczamy go $R(A)$. Przyjmujemy $R(0) = 0$.

Intuicja

Rząd mówi, ile wierszy macierzy jest „naprawdę różnych” – ile z nich nie da się otrzymać z pozostałych przez dodawanie i mnożenie przez liczby. W praktyce: zaczynamy od największych możliwych minorów i schodzimy w dół, aż trafimy na niezerowy.

Przykład 2.2.6. Obliczmy rzędy macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Macierz A . Ma 2 wiersze, więc $R(A) \leq 2$. Minor ze skreśloną trzecią kolumną: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$ – pech, szukamy dalej. Skreślamy środkową kolumnę: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$. Zatem $R(A) = 2$.

Macierz B . Jedyny minor stopnia 3 to $\det B = 0 - 8 + 0 + 4 - 0 + 4 = 0$, więc $R(B) \leq 2$. Skreślając trzeci wiersz i trzecią kolumnę, dostajemy $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Zatem $R(B) = 2$.

Zadanie 2.2.7. Wyznacz rzędy macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Macierz odwrotna.

Definicja 2.2.8. Macierz kwadratową $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nazywamy **odwracalną**, jeśli istnieje macierz B taka, że $AB = BA = I_n$. Macierz B nazywamy wtedy **macierzą odwrotną** do A i oznaczamy A^{-1} .

Intuicja

Macierz odwrotna jest odpowiednikiem odwrotności liczby: $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$, a $A \cdot A^{-1} = I$. Tak jak 0 nie ma odwrotności, tak nie każda macierz jest odwracalna.

Twierdzenie 2.2.9. Macierz A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$. Wówczas

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^D)^T,$$

gdzie $A^D := [d_{j,k}]$ jest **macierzą dopełnień algebraicznych** (w miejscu każdego wyrazu wpisujemy jego dopełnienie algebraiczne).

Przykład 2.2.10 (macierz 2×2). Dla $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ wzór daje bardzo prostą receptę:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

– zamieniamy miejscami wyrazy na przekątnej, zmieniamy znaki pozostałych i dzielimy przez wyznacznik. Np. dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$: $\det A = 4 - 6 = -2$, więc $A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Sprawdzenie: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{bmatrix} = I_2$.

Przykład 2.2.11 (macierz 3×3). Wyznamy odwrotność $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

Krok 1: wyznacznik. $\det B = 0 + 0 - 8 - 6 - 0 - 0 = -14 \neq 0$, więc B jest odwracalna.

Krok 2: dopełnienia algebraiczne. Dla każdego wyrazu skreślamy jego wiersz i kolumnę, liczymy wyznacznik 2×2 i dobieramy znak z szachownicy:

$$B^D = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -14 \\ 4 & -3 & 6 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Krok 3: transpozycja i dzielenie.

$$B^{-1} = -\frac{1}{14} \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \\ -14 & 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & \frac{3}{14} & \frac{1}{7} \\ 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}.$$

Typowy błąd

Najczęstsze błędy: zapominanie o znakach z szachownicy i zapominanie o transpozycji w kroku 3. Zawsze warto sprawdzić wynik, mnożąc BB^{-1} – powinno wyjść I_3 .

Zadanie 2.2.12.

(1) Czy macierze $\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ są odwracalne? Jeśli tak, wyznacz ich odwrotności.

(2) Wyznacz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$.

2.3. Układy równań liniowych

Definicja 2.3.1. Układem m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \dots, x_n$ nazywamy

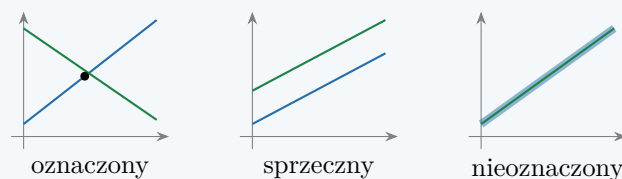
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Macierz współczynników $A = [a_{j,k}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ nazywamy **macierzą główną**, a macierz $U \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$ powstałą z A przez dopisanie kolumny wyrazów wolnych $b_1, \dots, b_m$ – **macierzą uzupełnioną** układu.

Układ nazywamy **sprzecznym**, jeśli nie ma rozwiązań; **oznaczonym**, jeśli ma dokładnie jedno rozwiązanie; **nieoznaczonym**, jeśli ma nieskończenie wiele rozwiązań. Innych możliwości nie ma.

Intuicja

Dla dwóch równań z dwiema niewiadomymi każde równanie to prosta na płaszczyźnie. Dwie proste mogą się przecinać w jednym punkcie (układ oznaczony), być równoległe i rozłączne (spreczny) albo się pokrywać (nieoznaczony).



Twierdzenie 2.3.2 (Kroneckera–Capellego). Układ (1) jest

- (a) spreczny $\iff R(A) < R(U)$;
- (b) oznaczony $\iff R(A) = R(U) = n$ (liczba niewiadomych);
- (c) nieoznaczony $\iff R(A) = R(U) < n$.

W przypadku (c) liczba $n - R(A)$ mówi, ile niewiadomych możemy wybrać dowolnie – będą one **parametrami**. Praktyczna recepta: jeśli $k = R(A) = R(U)$ i niezerowy minor stopnia k znaleźliśmy w pewnych k wierszach i k kolumnach, to

- pomijamy równania, których nie użyliśmy w tym minorze;
- niewiadome, których kolumn nie użyliśmy, przenosimy na prawą stronę i traktujemy jak parametry;

otrzymujemy układ k równań z k niewiadomymi, który ma dokładnie jedno rozwiązanie (zależne od parametrów).

Twierdzenie 2.3.3 (wzory Cramera). Jeśli układ ma tyle samo równań co niewiadomych ($m = n$) i $\det A \neq 0$, to jedynym rozwiązaniem jest

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \quad j = 1, \dots, n,$$

gdzie A_j powstaje z A przez zastąpienie j -tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.

W laboratorium: mieszanie roztworów

Mamy roztwory NaCl o stężeniach 0,1 M i 0,5 M. Ile mililitrów każdego trzeba zmieszać, aby otrzymać 500 ml roztworu 0,15 M?

Niech x, y – objętości (w ml) roztworu słabszego i mocniejszego. Objętości się sumują, a liczba moli NaCl też:

$$\begin{cases} x + y = 500 \\ 0,1x + 0,5y = 0,15 \cdot 500 = 75 \end{cases} \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0,1 & 0,5 \end{vmatrix} = 0,4,$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 500 & 1 \\ 75 & 0,5 \end{vmatrix}}{0,4} = \frac{250 - 75}{0,4} = 437,5, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 500 \\ 0,1 & 75 \end{vmatrix}}{0,4} = \frac{75 - 50}{0,4} = 62,5.$$

Trzeba mieszać 437,5 ml roztworu 0,1 M z 62,5 ml roztworu 0,5 M.

Przykład 2.3.4. Rozwiążmy układ

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - z = -3 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mamy $\det A = -6 \neq 0$, więc $R(A) = R(U) = 3$ i układ jest oznaczony. Ze wzorów Cramera:

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6, \quad \det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -6,$$

więc $x = \frac{6}{-6} = -1$, $y = 0$, $z = \frac{-6}{-6} = 1$. Sprawdzenie w pierwszym równaniu: $-1 + 0 + 1 = 0$. ✓

Przykład 2.3.5 (układ z parametrem). Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ układ

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ ax - y - 2z = 3 \\ 4ay + 2z = 0 \end{cases}$$

jest oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny? Rozwiążmy go dla $a = 2$ i $a = 1$.

Krok 1: wyznacznik główny. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & -1 & -2 \\ 0 & 4a & 2 \end{vmatrix} = -2 - 4a^2 + 8a - 2a = -4a^2 + 6a - 2 = -2(2a - 1)(a - 1)$. Zeruje się dla $a = \frac{1}{2}$ i $a = 1$.

Krok 2: $a \notin \{\frac{1}{2}, 1\}$. Wtedy $R(A) = R(U) = 3$, układ jest oznaczony.

Krok 3: $a = 1$. Minor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, więc $R(A) = 2$. Wszystkie minory stopnia 3 macierzy U

zawierające kolumnę wyrazów wolnych są zerowe (np. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$ – warto sprawdzić pozostałe dwa), więc $R(U) = 2 < 3$: układ nieoznaczony.

Krok 4: $a = \frac{1}{2}$. Znów $R(A) = 2$, ale minor macierzy U ze skreśloną pierwszą kolumną $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, więc $R(U) = 3 > R(A)$: układ sprzeczny.

Krok 5: $a = 2$. Układ $x + y - z = 3$, $2x - y - 2z = 3$, $8y + 2z = 0$ ma $\det A = -6$ oraz $\det A_x = 12$, $\det A_y = -6$, $\det A_z = 24$, więc $x = -2$, $y = 1$, $z = -4$.

Krok 6: $a = 1$. Minor niezerowy znaleźliśmy w dwóch pierwszych wierszach i kolumnach x, y . Pomijamy trzecie równanie, a z traktujemy jako parametr:

$$\begin{cases} x + y = 3 + z \\ x - y = 3 + 2z \end{cases}$$

Dodając równania stronami: $2x = 6 + 3z$, czyli $x = 3 + \frac{3}{2}z$; odejmując: $2y = -z$, czyli $y = -\frac{1}{2}z$. Rozwiązaniem jest każda trójka $(3 + \frac{3}{2}z, -\frac{1}{2}z, z)$, $z \in \mathbb{R}$ – nieskończenie wiele rozwiązań, po jednym dla każdej wartości parametru.

W laboratorium: bilansowanie równań reakcji

Spalanie glukozy: $a \text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6 + b \text{O}_2 \rightarrow c \text{CO}_2 + d \text{H}_2\text{O}$. Liczba atomów każdego pierwiastka musi być po obu stronach taka sama:

$$\text{C} : 6a = c, \quad \text{H} : 12a = 2d, \quad \text{O} : 6a + 2b = 2c + d.$$

To 3 równania z 4 niewiadomymi – układ jest nieoznaczony (rzęd macierzy głównej wynosi 3, a niewiadomych jest 4), z jednym parametrem. Biorąc a za parametr, dostajemy $c = 6a$, $d = 6a$, $b = 6a$. Wybierając najmniejsze liczby naturalne ($a = 1$): $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6 + 6 \text{O}_2 \rightarrow 6 \text{CO}_2 + 6 \text{H}_2\text{O}$. Nieoznaczoność ma tu sens chemiczny: równanie reakcji można pomnożyć przez dowolną liczbę.

Zapis macierzowy. Jeśli $X = [x_1 \dots x_n]^T$ i $B = [b_1 \dots b_m]^T$ są macierzami kolumnowymi niewiadomych i wyrazów wolnych, to układ (1) można zapisać krótko jako

$$AX = B.$$

(Wystarczy wymnożyć AX zgodnie z definicją, by zobaczyć lewe strony równań.) Jeśli A jest kwadratowa i $\det A \neq 0$, to mnożąc obie strony z lewej przez A^{-1} , dostajemy

$$X = A^{-1}B.$$

Przykład 2.3.6. Dla układu z Przykładu 2.3.4:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

co zgadza się z poprzednim wynikiem.

Zadanie 2.3.7.

(1) Rozwiąż układy równań:

$$(a) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -x + 2y + 3z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + 3y - 4z = 4 \\ 3x + 2y - z = 1 \\ x - 4y + 7z = 5 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 4x + 5y - 6z = 3 \\ y - 2z = -1 \\ 2x + 3y - 3z = 2 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2x + 3y - 3z = 0 \\ -x + 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 4x - y = 7 \\ 3x + y = 14 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} x + 2y + 5z = 4 \\ 3x - y + z = 5 \end{cases}$$

(2) Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ układ
$$\begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ 2x + ay - z = 9 \\ 3x - 4y + 2z = -5 \end{cases}$$
 jest oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny?

Rozwiąż go dla $a = 0$.

(3) Rozwiąż równania macierzowe $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Zadanie 2.3.8 (bilans reakcji). Zbilansuj równanie fotosyntezy $a \text{CO}_2 + b \text{H}_2\text{O} \rightarrow c \text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6 + d \text{O}_2$, zapisując i rozwiązując odpowiedni układ równań.

Odpowiedź: $6 \text{CO}_2 + 6 \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6 + 6 \text{O}_2$.

Zadanie 2.3.9 (mieszanie). Ile ml 70% etanolu i ile ml wody trzeba zmieszać, aby otrzymać 350 ml 40% etanolu? (Przyjmij, że objętości się sumują.)

Odpowiedź: 200 ml 70% etanolu i 150 ml wody.

3. Funkcje rzeczywiste zmiennej rzeczywistej

Intuicja

Funkcja to reguła, która każdej wartości „wejściowej” przypisuje jedną wartość „wyjściową”: stężeniu substratu – szybkość reakcji, czasowi hodowli – liczbę bakterii, stężeniu jonów H^+ – pH. W tym rozdziale poznamy podstawowe typy funkcji, z których buduje się niemal wszystkie modele w naukach przyrodniczych.

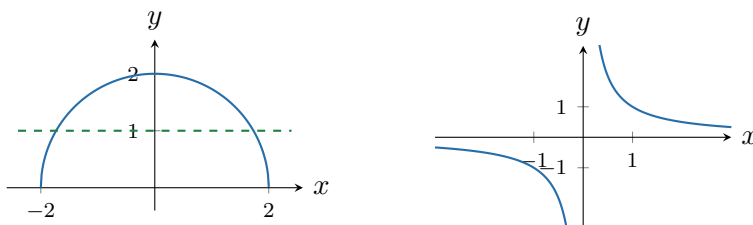
3.1. Funkcje. Pojęcia wstępne

Definicja 3.1.1. Niech $X \subset \mathbb{R}$ będzie niepustym zbiorem. **Funkcją** $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy przyporządkowanie, które każdej liczbie $x \in X$ przypisuje *dokładnie jedną* liczbę $f(x) \in \mathbb{R}$.

- X to **dziedzina** funkcji, jej elementy to **argumenty**;
- zbiór wszystkich wartości $f(X) := \{f(x) : x \in X\}$ to **zbiór wartości** (obraz) funkcji;
- **wykres** funkcji to zbiór punktów płaszczyzny $\Gamma(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\}$.

Uwaga 3.1.2. Jeśli funkcję podajemy samym wzorem, bez dziedziny, to za dziedzinę przyjmujemy wszystkie x , dla których wzór ma sens. W praktyce oznacza to sprawdzenie trzech rzeczy: **mianownik** $\neq 0$, **wyrażenie pod pierwiastkiem parzystego stopnia** ≥ 0 , **wyrażenie pod logarytmem** > 0 .

Przykład 3.1.3. Dziedziną $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ jest zbiór tych x , dla których $4 - x^2 \geq 0$, czyli $x^2 \leq 4$, czyli $x \in [-2, 2]$. Wykres to górna połowa okręgu o środku $(0, 0)$ i promieniu 2 (Rysunek 1): istotnie, $y = \sqrt{4 - x^2}$ oznacza $y \geq 0$ i $x^2 + y^2 = 4$.



Rysunek 1: Lewy: $y = \sqrt{4 - x^2}$ i prosta $y = 1$, która przecina wykres dwukrotnie. Prawy: $y = 1/x$.

Definicja 3.1.4. Funkcja f jest **różnowartościowa**, jeśli różnym argumentom przypisuje różne wartości: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Intuicja: test prostej poziomej

Funkcja jest różnowartościowa dokładnie wtedy, gdy każda prosta pozioma przecina jej wykres *co najwyżej raz*. Zbiór wartości to zbiór tych c , dla których prosta $y = c$ przecina wykres *co najmniej raz*.

Przykład 3.1.5.

- (a) $f(x) = x^2$ nie jest różnowartościowa, bo $f(-1) = f(1)$. Ta sama funkcja rozpatrywana tylko dla $x \leq 0$ już jest różnowartościowa (lewe ramię paraboli).

(b) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ nie jest różnowartościowa: prosta $y = 1$ przecina wykres w $(-\sqrt{3}, 1)$ i $(\sqrt{3}, 1)$. Jej zbiór wartości to $[0, 2]$.

(c) $h(x) = 1/x$ ma dziedzinę $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ten sam zbiór wartości i jest różnowartościowa (Rysunek 1).

Definicja 3.1.6 (funkcja monotoniczna). Funkcja f jest

- **rosnąca**, jeśli dla $x_1 < x_2$ mamy $f(x_1) \leq f(x_2)$, **silnie rosnąca**, jeśli $f(x_1) < f(x_2)$;
- **malejąca**, jeśli dla $x_1 < x_2$ mamy $f(x_1) \geq f(x_2)$, **silnie malejąca**, jeśli $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkcja rosnąca lub malejąca to funkcja **monotoniczna**.

Uwaga na nazewnictwo: w tym skrypcie „rosnąca” dopuszcza fragmenty stałe (np. funkcja stała jest jednocześnie rosnąca i malejąca), a „silnie rosnąca” – nie. W szkole „rosnąca” oznaczała zwykle to, co tu nazywamy silnie rosnącą.

Przykład 3.1.7. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ jest silnie rosnąca na $[-2, 0]$ i silnie malejąca na $[0, 2]$, ale na całej dziedzinie nie jest monotoniczna. $h(x) = 1/x$ jest silnie malejąca na $(-\infty, 0)$ i osobno na $(0, \infty)$, ale *nie* na całej dziedzinie: $h(-1) = -1 < 1 = h(1)$.

Definicja 3.1.8. Niech dziedzina X będzie symetryczna względem zera. Funkcja f jest **parzysta**, jeśli $f(-x) = f(x)$ (wykres symetryczny względem osi y), a **nieparzysta**, jeśli $f(-x) = -f(x)$ (wykres symetryczny względem początku układu).

Np. x^2 jest parzysta, x^3 nieparzysta, a $x+1$ ani parzysta, ani nieparzysta ($h(-1) = 0$, $h(1) = 2$).

Definicja 3.1.9. Funkcja f jest **okresowa** z okresem $c > 0$, jeśli $f(x+c) = f(x)$ dla wszystkich x z dziedziny. Najmniejszy taki okres nazywamy **okresem podstawowym**.

Funkcje możemy dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić „punkt po punkcie”: $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, $(fg)(x) := f(x)g(x)$, $(f/g)(x) := f(x)/g(x)$ (tylko tam, gdzie $g(x) \neq 0$).

Zadanie 3.1.10.

- (1) Dla funkcji $g(x) = |x|$ i $h(x) = \frac{|x|}{x}$ wyznacz dziedzinę, zbiór wartości, narysuj wykres, sprawdź różnowartościowość, monotoniczność i parzystość.
- (2) Wyznacz dziedziny funkcji: $\frac{x+1}{x^2-4}$, $\sqrt{x-3}$, $\sqrt{9-x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$.
- (3) Sprawdź, czy są różnowartościowe: $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{x+1}{x}$.
- (4) ★Wykaż, że każdą funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ można zapisać jako sumę funkcji parzystej i nieparzystej. *Wskazówka:* rozważ $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$.

3.2. Wielomiany. Funkcje wymierne

Definicja 3.2.1. **Wielomianem** nazywamy funkcję postaci $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $x \in \mathbb{R}$. Jeśli $a_n \neq 0$, to n jest **stopniem** wielomianu. Liczbę p taką, że $f(p) = 0$, nazywamy **pierwiastkiem** wielomianu.

Wielomiany stopnia 0 to funkcje stałe, stopnia 1 – funkcje liniowe (wykres: prosta), stopnia 2 – funkcje kwadratowe (wykres: parabola, zob. Podrozdział 0.2).

Uwaga 3.2.2. Każdy wielomian rozkłada się na iloczyn czynników stopnia 1 i nierozkładalnych czynników stopnia 2 (z $\Delta < 0$), np. $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$. Jeśli p jest pierwiastkiem wielomianu f , to $f(x) = (x-p) \cdot g(x)$ dla pewnego wielomianu g (**twierdzenie Bézouta**). Pierwiastków całkowitych warto szukać wśród dzielników wyrazu wolnego a_0 .

Nierówności wielomianowe – metoda „wężyka”. Aby rozwiązać $f(x) > 0$ (lub $< 0, \geq 0, \leq 0$):

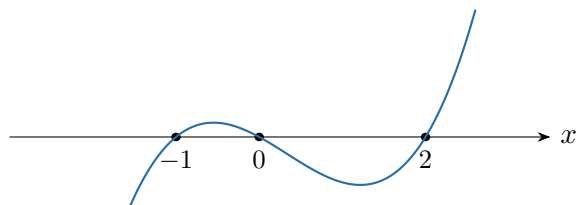
1. rozkładamy f na czynniki i zaznaczamy pierwiastki na osi;
2. rysujemy linię zaczynającą się z *prawej strony* nad osią, jeśli współczynnik przy najwyższej potęgę jest dodatni (pod osią – jeśli ujemny);
3. w każdym pierwiastku linia przechodzi na drugą stronę osi – chyba że pierwiastek jest parzystokrotny (np. z czynnika $(x - p)^2$), wtedy tylko się „odbija”;
4. odczytujemy przedziały, w których linia jest nad osią ($f > 0$) lub pod nią ($f < 0$).

Przykład 3.2.3. Rozwiążmy $x^3 - x^2 \geq 2x$.

Krok 1. Przenosimy wszystko na jedną stronę: $x^3 - x^2 - 2x \geq 0$, czyli $x(x^2 - x - 2) \geq 0$.

Krok 2. Trójmian: $\Delta = 1 + 8 = 9$, pierwiastki -1 i 2 . Zatem $x(x + 1)(x - 2) \geq 0$.

Krok 3. Pierwiastki $-1, 0, 2$ są jednokrotne, współczynnik przy x^3 jest dodatni:



Odpowiedź: $x \in [-1, 0] \cup [2, \infty)$.

Definicja 3.2.4. Funkcją wymierną nazywamy iloraz dwóch wielomianów $f(x) = \frac{w_1(x)}{w_2(x)}$, określony tam, gdzie $w_2(x) \neq 0$.

Przykład 3.2.5. Rozwiążmy nierówność $\frac{14}{x^2 - 5x + 6} \leq \frac{10}{2 - x} - 3$.

Krok 1: dziedzina. $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, więc $x \neq 2, x \neq 3$.

Krok 2: wszystko na jedną stronę i wspólny mianownik. Ponieważ $\frac{10}{2-x} = \frac{-10}{x-2} = \frac{-10(x-3)}{(x-2)(x-3)}$, mamy

$$\frac{14 + 10(x - 3) + 3(x - 2)(x - 3)}{(x - 2)(x - 3)} \leq 0 \iff \frac{3x^2 - 5x + 2}{(x - 2)(x - 3)} \leq 0 \iff \frac{3(x - \frac{2}{3})(x - 1)}{(x - 2)(x - 3)} \leq 0.$$

Krok 3: zamiana ilorazu na iloczyn. Iloraz i iloczyn dwóch liczb mają ten sam znak, więc rozwiązujemy $3(x - \frac{2}{3})(x - 1)(x - 2)(x - 3) \leq 0$, pamiętając o $x \neq 2, 3$. Z wężyka: $x \in [\frac{2}{3}, 1] \cup (2, 3)$.

Typowy błąd

Nierówności z niewiadomą w mianowniku *nie wolno* mnożyć przez mianownik, nie znając jego znaku – mnożenie przez liczbę ujemną zmienia kierunek nierówności. Bezpieczna droga to ta z przykładu: wszystko na jedną stronę, wspólny mianownik, zamiana na iloczyn.

Zadanie 3.2.6. Rozwiąż równania i nierówności (symbol $\gtrless$ oznacza: rozwiąż osobno równanie oraz obie nierówności $>$ i $<$):

$$(1) x^2 + 1 \geq -x,$$

$$(2) |x^2 - 5| \geq 1,$$

$$(3) x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 12x + 9 \geq 0,$$

$$(4) x^5 - x^4 + x^3 - x^2 \geq 0,$$

$$(5) \frac{1}{x-1} \geq \frac{x}{2-x},$$

$$(6) \frac{x-1}{x+1} \geq \frac{1}{x+2}.$$

W jakich przedziałach funkcja $f(x) = (x+4)(x+1)(x-1)$ jest ujemna, a w jakich nie mniejsza od -4 ?

3.3. Funkcje trygonometryczne

Definicja 3.3.1. Miarą łukową kąta nazywamy długość łuku okręgu o promieniu 1 wyciętego przez ten kąt. Jednostką jest **radian**. Kąt pełny (360°) to obwód okręgu jednostkowego, czyli 2π ; stąd kąt α stopni ma miarę $x = \frac{\pi}{180}\alpha$.

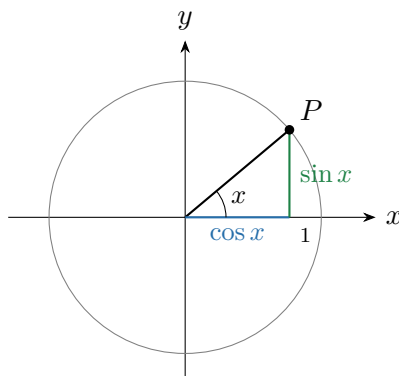
α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

W analizie matematycznej *zawsze* używamy radianów – tylko w nich wzory na pochodne funkcji trygonometrycznych mają prostą postać.

Definicja 3.3.2. Niech P będzie punktem okręgu jednostkowego o środku $(0,0)$, a x – miarą łukową kąta skierowanego od dodatniej półosi OX do promienia OP (kąty dodatnie odmierzamy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Wtedy

$\cos x :=$ pierwsza współrzędna (odcięta) punktu P ,

$\sin x :=$ druga współrzędna (rzędna) punktu P .



Uwaga 3.3.3.

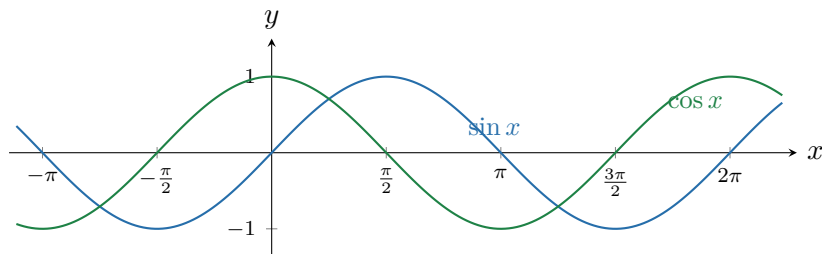
- (a) $\sin$ i $\cos$ są określone na całym $\mathbb{R}$, przyjmują wartości z przedziału $[-1, 1]$.
- (b) Są okresowe z okresem podstawowym 2π : $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.
- (c) $\sin$ jest nieparzysta ($\sin(-x) = -\sin x$), $\cos$ jest parzysta ($\cos(-x) = \cos x$).
- (d) Zachodzą wzory (warto je znać na pamięć):

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x,$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1



Rysunek 2: Wykresy $y = \sin x$ i $y = \cos x$. Wykres cosinusa to wykres sinusa przesunięty o $\frac{\pi}{2}$ w lewo.

Przykład 3.3.4. Rozwiążmy $\sin 2x = \sin x$.

Krok 1. Ze wzoru na $\sin 2x$: $2 \sin x \cos x - \sin x = 0$, czyli $\sin x (2 \cos x - 1) = 0$.

Krok 2. Iloczyn jest zerem, gdy któryś czynnik jest zerem: $\sin x = 0$ lub $\cos x = \frac{1}{2}$.

Krok 3. $\sin x = 0 \iff x = k\pi$; $\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Rozwiązania z jednego okresu odczytujemy z tabeli, a resztę dostajemy, dodając wielokrotności okresu.

Przykład 3.3.5. Rozwiążmy $4 \cos^2 x \geq 3$. Mamy $\cos^2 x \geq \frac{3}{4}$, czyli $|\cos x| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$: $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Z wykresu cosinusa: $x \in [-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Definicja 3.3.6. Tangens: $\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x}$ (dla $\cos x \neq 0$, czyli $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$); **cotangens:** $\operatorname{ctg} x := \frac{\cos x}{\sin x}$ (dla $x \neq k\pi$). Obie funkcje są okresowe z okresem π , nieparzyste, przyjmują wszystkie wartości rzeczywiste.

Wartości: $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$; $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ nie istnieje.

W laboratorium: rytm dobowy

Temperatura ciała człowieka zmienia się w ciągu doby w przybliżeniu jak

$$T(t) = 36,8 + 0,4 \cos\left(\frac{\pi(t-17)}{12}\right) \text{ [}^\circ\text{C]}, \quad t - \text{godzina doby.}$$

Okres to 24 h (bo $\frac{\pi}{12} \cdot 24 = 2\pi$), maksimum $37,2^\circ\text{C}$ wypada o 17:00 (wtedy cosinus ma argument 0), a minimum $36,4^\circ\text{C}$ – 12 godzin później, o 5:00. Liczbę 0,4 nazywamy **amplitudą**, a 36,8 – **poziomem średnim**. Takimi funkcjami opisuje się rytmy okołodobowe ekspresji genów, wydzielania hormonów czy aktywności zwierząt.

Zadanie 3.3.7.

(1) Rozwiąż równanie i nierówności: $\cos 2x \geq \cos x$, $\sin x \geq \cos x$, $\operatorname{tg}^2 x \geq 3$.

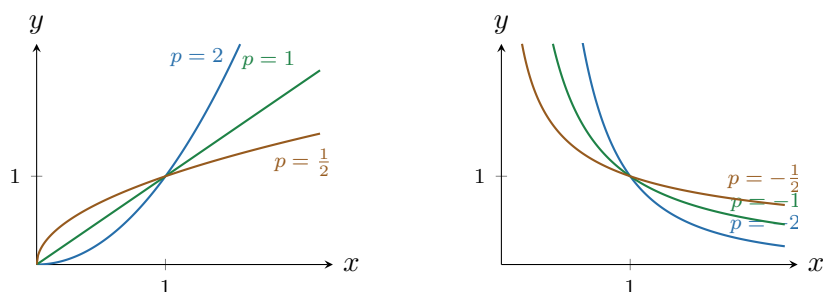
(2) W modelu z ramki: o której godzinie temperatura ciała wynosi dokładnie $36,8^\circ\text{C}$?

Odpowiedź: o 11:00 i o 23:00.

3.4. Funkcja potęgowa. Funkcja wykładnicza

Definicja 3.4.1. Dla ustalonego $p \in \mathbb{R}$ funkcję $x \mapsto x^p$, $x > 0$, nazywamy **funkcją potęgową**.

Dla $p \in \mathbb{N}$ wzór $x^p = x \cdot \dots \cdot x$ ma sens dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$; dla całkowitych $p < 0$ – dla $x \neq 0$. Dla $p > 0$ funkcja potęgowa jest silnie rosnąca, dla $p < 0$ – silnie malejąca.



Rysunek 3: Funkcje potęgowe $y = x^p$ dla $p > 0$ (lewy) i $p < 0$ (prawy).

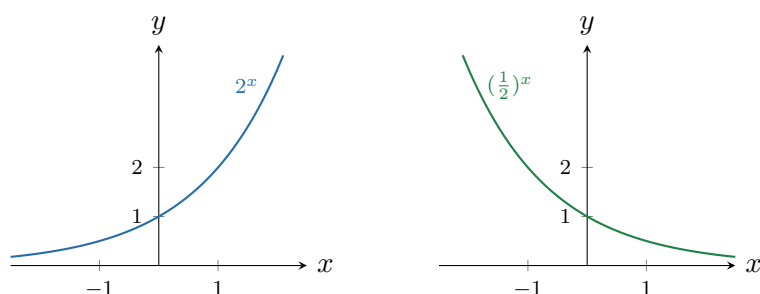
Przykład 3.4.2. Rozwiążmy $\sqrt{x} \leq x$. Pierwiastek ma sens dla $x \geq 0$. Obie strony są wtedy nieujemne, więc wolno podnieść nierówność do kwadratu: $x \leq x^2$, czyli $x(x - 1) \geq 0$, czyli $x \leq 0$ lub $x \geq 1$. Z założeniem $x \geq 0$: $x \in \{0\} \cup [1, \infty)$.

Typowy błąd

Podnosić nierówność do kwadratu wolno tylko wtedy, gdy obie strony są nieujemne. Np. $-3 < 2$, ale $(-3)^2 > 2^2$.

Definicja 3.4.3. Dla $a > 0$, $a \neq 1$, funkcję $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$, nazywamy **funkcją wykładniczą** o podstawie a .

- $a^x > 0$ dla wszystkich x , $a^0 = 1$ (wykres zawsze przechodzi przez $(0, 1)$);
- dla $a > 1$ funkcja jest silnie rosnąca, dla $0 < a < 1$ – silnie malejąca;
- jest różnowartościowa: $a^{x_1} = a^{x_2} \iff x_1 = x_2$. To pozwala „opuszczać podstawy” w równaniach.



Rysunek 4: Funkcja wykładnicza dla $a > 1$ (wzrost) i $0 < a < 1$ (zanik).

W laboratorium: wzrost hodowli bakteryjnej

W fazie wzrostu wykładniczego liczba komórek podwaja się co stały czas T (czas generacji).

Po czasie t nastąpiło t/T podwojeń, więc

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{t/T}.$$

Dla *E. coli* w dobrych warunkach $T \approx 20$ min. Startując z $N_0 = 1000$ komórek, po 3 godzinach ($t = 180$ min, czyli 9 podwojeń) mamy $N = 1000 \cdot 2^9 = 512\,000$ komórek. Dokładnie tym samym wzorem z podstawą $\frac{1}{2}$ opisujemy zanik: rozpad promieniotwórczy czy eliminację leku z organizmu, $C(t) = C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}}$, gdzie $T_{1/2}$ to czas połowicznego zaniku.

Przykład 3.4.4. Rozwiążmy $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$.

Krok 1: dziedzina. $x - 2 \geq 0$, czyli $x \geq 2$.

Krok 2: podstawienie. $4^{\sqrt{x-2}} = (2^2)^{\sqrt{x-2}} = \left(2^{\sqrt{x-2}}\right)^2$. Niech $t = 2^{\sqrt{x-2}}$; wtedy $t^2 - 10t + 16 = 0$, skąd $t = 2$ lub $t = 8$.

Krok 3: powrót do x . $2^{\sqrt{x-2}} = 2^1$ daje $\sqrt{x-2} = 1$, $x = 3$; $2^{\sqrt{x-2}} = 2^3$ daje $\sqrt{x-2} = 3$, $x = 11$. Oba wyniki należą do dziedziny: $x \in \{3, 11\}$.

Przykład 3.4.5. Rozwiążmy $2^{3x+5} - 4^{x-1} > 0$. Zapisujemy wszystko przy podstawie 2: $2^{3x+5} > 2^{2x-2}$. Podstawa $2 > 1$, więc funkcja jest rosnąca i nierówność wykładników ma ten sam kierunek: $3x + 5 > 2x - 2$, czyli $x > -7$.

Typowy błąd

Gdy podstawa jest z przedziału $(0, 1)$, funkcja wykładnicza jest *malejąca*, więc przy „opuszczaniu podstaw” kierunek nierówności się *zmienia*: $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^3 \iff x < 3$.

Zadanie 3.4.6. Rozwiąż równania i nierówności:

$$(1) \quad x \geq \sqrt{x+1},$$

$$(3) \quad \left(\frac{4}{9}\right)^x \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} \geq \frac{2}{3},$$

$$(2) \quad 3^{1/x} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x},$$

$$(4) \quad 8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x \geq 0.$$

3.5. Funkcja logarytmiczna

Definicja 3.5.1. Dla $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ **logarytmem** liczby b przy podstawie a nazywamy wykładnik, do którego trzeba podnieść a , żeby otrzymać b :

$$\log_a b = x \iff a^x = b.$$

Piszemy $\log b := \log_{10} b$ (logarytm dziesiętny).

Np. $\log_2 8 = 3$ (bo $2^3 = 8$), $\log 0,001 = -3$, $\log_9 3 = \frac{1}{2}$.

Przypomnienie z liceum: własności logarytmów

Dla $a, b, c > 0$, $a \neq 1$:

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1, \quad \log_a a^x = x, \quad a^{\log_a b} = b,$$

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c, \quad \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \quad \log_a b^x = x \log_a b, \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Definicja 3.5.2. Funkcję $x \mapsto \log_a x$, $x > 0$, nazywamy **funkcją logarytmiczną**. Jest różnowartościowa; dla $a > 1$ silnie rosnąca, dla $0 < a < 1$ silnie malejąca. Jej wykres przechodzi przez $(1, 0)$.

W laboratorium: pH

Stężenia jonów wodorowych w roztworach wodnych zmieniają się od ok. 1 do 10^{-14} mol/L – skala zbyt rozległa, by wygodnie się nią posługiwać. Dlatego wprowadza się

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+].$$

Jeśli $[\text{H}^+] = 3,2 \cdot 10^{-4}$ M, to $\text{pH} = -(\log 3,2 + \log 10^{-4}) \approx -(0,505 - 4) \approx 3,49$. W drugą stronę: krew o pH 7,4 ma $[\text{H}^+] = 10^{-7,4} \approx 4,0 \cdot 10^{-8}$ M. Spadek pH o 1 oznacza *dziesięciokrotny* wzrost stężenia jonów wodorowych – to bezpośrednio wynika z własności $\log(10b) = 1 + \log b$.

W laboratorium: ile czasu?

Logarytm pozwala „wyciągnąć” czas z wykładnika. Ile minut potrzeba hodowli *E. coli* z poprzedniego podrozdziału, by z 1000 komórek zrobił się milion?

$$1000 \cdot 2^{t/20} = 10^6 \iff 2^{t/20} = 1000 \iff \frac{t}{20} = \log_2 1000 = \frac{\log 1000}{\log 2} = \frac{3}{0,301} \approx 9,97,$$

czyli $t \approx 199$ min, nieco ponad 3 godziny i 19 minut.

Przykład 3.5.3. Rozwiążmy $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3$.

Krok 1: dziedzina. $x+1 > 0$ i $x-1 > 0$, czyli $x > 1$.

Krok 2. $\log_2((x+1)(x-1)) = 3 = \log_2 8$, więc $x^2 - 1 = 8$, $x = \pm 3$.

Krok 3. Tylko $x = 3$ należy do dziedziny. Odpowiedź: $x = 3$.

Typowy błąd

$\log(b+c) \neq \log b + \log c$ oraz $\log_a \frac{b}{c} \neq \frac{\log_a b}{\log_a c}$. I zawsze na końcu sprawdzamy dziedzinę – równania logarytmiczne bardzo często mają „fałszywe” rozwiązania.

Zadanie 3.5.4.

(1) Rozwiąż: $\log_2 \frac{x+3}{x-1} - \log_2 5 \geq 0$, $\log_2(x+14) + \log_2(x+2) \geq 6$, $\log(\log x) + \log(\log x^2 - 1) = 1$.

(2) Oblicz pH roztworu, w którym $[\text{H}^+] = 2 \cdot 10^{-9}$ M. Ile razy większe jest stężenie jonów H^+ w soku żołądkowym o pH 1,5 niż we krwi o pH 7,4?

Odpowiedź: $\text{pH} \approx 8,70$; $10^{5,9} \approx 794\,000$ razy.

(3) Czas połowicznej eliminacji pewnego leku wynosi 6 h. Jaki procent dawki pozostaje w organizmie po dobie? Po ilu godzinach zostanie 10% dawki?

Odpowiedź: $(\frac{1}{2})^4 = 6,25\%$; po $6 \log_2 10 \approx 19,9$ h.

3.6. Złożenie funkcji i funkcja odwrotna

Definicja 3.6.1 (złożenie). Jeśli wartości funkcji f należą do dziedziny funkcji g , to **złożeniem** $g \circ f$ nazywamy funkcję

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

f to funkcja **wewnętrzna** (działa pierwsza), g – **zewnętrzna**.

Intuicja

Złożenie to „taśma produkcyjna”: najpierw f przerabia x na $f(x)$, potem g przerabia wynik dalej. Umiejętność rozpoznania, z jakich „klocków” zbudowana jest funkcja, będzie kluczowa przy liczeniu pochodnych (Podrozdział 4.3).

Przykład 3.6.2.

- (a) $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$: wewnętrzna $f(x) = 4 - x^2$, zewnętrzna $g(y) = \sqrt{y}$.
- (b) $h(x) = \sin^2(3x) = (\sin(3x))^2$ to złożenie trzech funkcji: $x \mapsto 3x \mapsto \sin(3x) \mapsto (\sin 3x)^2$.
- (c) Dla $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$: $(f \circ g)(x) = \sin \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$), a $(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sin x}$ ($x \neq k\pi$). Kolejność ma znaczenie!

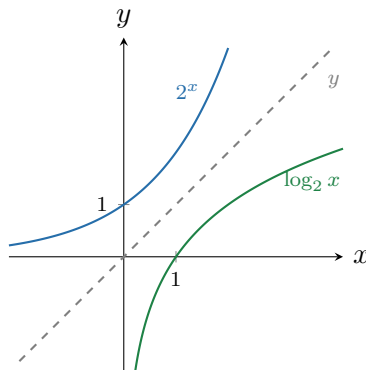
Definicja 3.6.3 (funkcja odwrotna). Jeśli f jest różnowartościowa, to każdej wartości $y \in f(X)$ odpowiada dokładnie jeden argument x , dla którego $f(x) = y$. Przyporządkowanie $y \mapsto x$ nazywamy **funkcją odwrotną** do f i oznaczamy f^{-1} .

Intuicja

Funkcja odwrotna „cofa” działanie f : jeśli f zamienia czas na liczbę bakterii, to f^{-1} zamienia liczbę bakterii z powrotem na czas. Wykresy f i f^{-1} są symetryczne względem prostej $y = x$.

Jak wyznaczyć funkcję odwrotną: zapisujemy $y = f(x)$, wyliczamy x w zależności od y , na koniec zamieniamy nazwy zmiennych. Silnie monotoniczna funkcja jest różnowartościowa, więc zawsze ma funkcję odwrotną.

Przykład 3.6.4. $f(x) = 2^x$ jest silnie rosnąca. Z $y = 2^x$ dostajemy $x = \log_2 y$, więc $f^{-1}(x) = \log_2 x$, $x > 0$. Podobnie $f(x) = x^2$ rozpatrywana dla $x \geq 0$ ma funkcję odwrotną $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.



Rysunek 5: Wykresy funkcji wzajemnie odwrotnych są symetryczne względem prostej $y = x$.

Zadanie 3.6.5.

- (1) Wyznacz $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$ i ich dziedziny dla: (a) $f(x) = 2x$, $g(x) = \sqrt{x}$; (b) $f(x) = 3x^2$, $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$.
- (2) Zapisz jako złożenie prostszych funkcji: $\log \sqrt{x+1}$, $\sin^2(2x^2 - 1)$, 2^{3x^3+2} , $\log_3 \cos(2x - 3)$.
- (3) Wyznacz funkcje odwrotne do: $f(x) = x^2 + 1$, $x < 0$; $f(x) = \log_3(x - 1) + 3$, $x > 1$; $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

3.7. Funkcje cyklometryczne

Funkcje trygonometryczne nie są różnowartościowe (są okresowe), więc nie mają funkcji odwrotnych na całym $\mathbb{R}$. Ale po *zawężeniu* do odpowiedniego przedziału już są silnie monotoniczne:

$$\sin \text{ na } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \cos \text{ na } [0, \pi], \quad \operatorname{tg} \text{ na } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Definicja 3.7.1. Funkcje odwrotne do tak zawężonych funkcji nazywamy **funkcjami cyklometrycznymi** i oznaczamy $\arcsin$, $\arccos$, arctg . Zatem

$$\arcsin x = y \iff \sin y = x \text{ i } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad x \in [-1, 1],$$

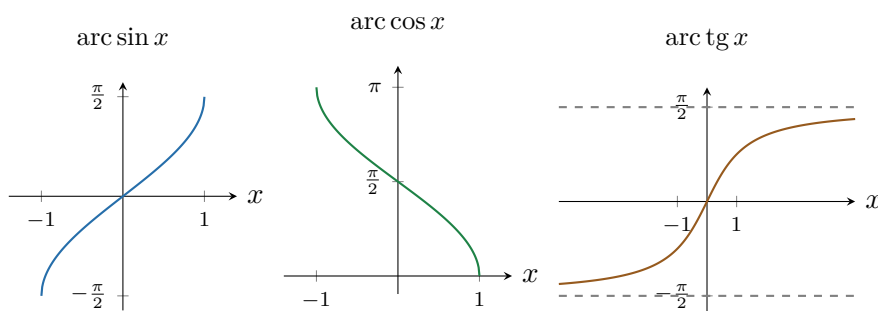
$$\arccos x = y \iff \cos y = x \text{ i } y \in [0, \pi], \quad x \in [-1, 1],$$

$$\operatorname{arctg} x = y \iff \operatorname{tg} y = x \text{ i } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Intuicja

$\arcsin x$ odpowiada na pytanie: „jaki kąt (z przedziału $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) ma sinus równy x ?”. Na kalkulatorze to klawisz $\sin^{-1}$ – ale uwaga, kalkulator domyślnie podaje wynik w stopniach.

Przykład 3.7.2. $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, bo $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ i $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi$, bo $\cos \frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\frac{3}{4}\pi \in [0, \pi]$. $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$.



Rysunek 6: Funkcje cyklometryczne.

Dla chętnych

Istnieje też $\operatorname{arccotg}$ – funkcja odwrotna do ctg zawężonego do $(0, \pi)$. Zachodzą tożsamości $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ dla $x \in [-1, 1]$ oraz $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Spróbuj udowodnić pierwszą: oznacz $\alpha = \arcsin x$, $\beta = \arccos x$ i pokaż, że $\sin(\frac{\pi}{2} - \beta) = \sin \alpha$.

Zadanie 3.7.3. Oblicz $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$, $\arcsin 1$, $\arccos 0$.

3.8. Ciągi. Granica ciągu

Definicja 3.8.1. Ciągiem nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych. Wartość dla n to n -ty wyraz a_n ; cały ciąg oznaczamy (a_n) .

Przykład 3.8.2. Ciąg harmoniczny $(\frac{1}{n}) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$; ciąg naprzemienny $((-1)^n) = -1, 1, -1, 1, \dots$; ciąg arytmetyczny $a_n = a_1 + (n-1)d$ (stała różnica d między kolejnymi wyrazami); ciąg geometryczny $a_n = a_1 q^{n-1}$ (stały iloraz q).

Przypomnienie z liceum: sumy ciągów

Suma n początkowych wyrazów: dla ciągu arytmetycznego $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$; dla geometrycznego $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ ($q \neq 1$) oraz $S_n = na_1$ ($q = 1$).

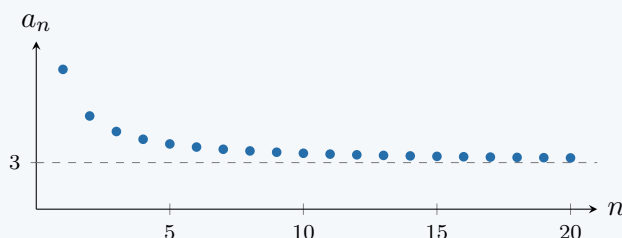
W laboratorium: drzewo genealogiczne trutnia

Ciąg Fibonacciego: $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, czyli $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$. Truteń (samiec pszczoły) rozwija się z niezapłodnionego jaja, więc ma tylko matkę; samica ma dwoje rodziców. Licząc przodków trutnia w kolejnych pokoleniach, dostajemy $1, 2, 3, 5, 8, \dots$ – kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego (u człowieka byłoby $2, 4, 8, 16, \dots$).

Granica ciągu.

Intuicja

Ciąg ma **granice** g , jeśli jego wyrazy, dla coraz większych n , zbliżają się do g dowolnie blisko i już tak blisko pozostają. Piszemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ lub $a_n \rightarrow g$. Ciąg, który ma granicę (skończoną), nazywamy **zbieżnym**, a pozostałe – **rozbieżnymi**.



Wyrazy ciągu $a_n = 3 + \frac{1}{n}$ zbliżają się do 3: $\lim(3 + \frac{1}{n}) = 3$.

Dla chętnych: ścisła definicja granicy

$\lim a_n = g$ oznacza: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 |a_n - g| < \varepsilon$. Słownie: jakkolwiek wąski pasek $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ wokół g narysujemy, od pewnego miejsca n_0 wszystkie wyrazy ciągu w nim leżą. Np. dla $a_n = \frac{1}{n}$, $g = 0$ i $\varepsilon = 0,01$ wystarczy $n_0 = 100$. Ciąg $((-1)^n)$ jest rozbieżny: żaden przedział długości mniejszej niż 2 nie zawiera prawie wszystkich jego wyrazów.

Twierdzenie 3.8.3 (działania na granicach). Jeśli $a_n \rightarrow a$ i $b_n \rightarrow b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), to $a_n \pm b_n \rightarrow a \pm b$, $a_n b_n \rightarrow ab$, a jeśli $b \neq 0$, to $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$.

Granice niewłaściwe. Piszemy $a_n \rightarrow \infty$, jeśli wyrazy ciągu rosną ponad wszelką granicę (przekraczają każdą liczbę i już jej nie spadają poniżej), i $a_n \rightarrow -\infty$ analogicznie. Np. $n \rightarrow \infty$, $n^2 \rightarrow \infty$, $2^n \rightarrow \infty$, $\sqrt{n} \rightarrow \infty$, $-n \rightarrow -\infty$, $n - n^2 \rightarrow -\infty$.

Twierdzenie 3.8.4 (ciągi wzorcowe). (a) $\frac{1}{n^k} \rightarrow 0$ dla $k > 0$; $n^k \rightarrow \infty$ dla $k > 0$.
 (b) $q^n \rightarrow 0$ dla $-1 < q < 1$; $q^n \rightarrow \infty$ dla $q > 1$; dla $q \leq -1$ granica nie istnieje.
 (c) $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$ dla $a > 0$ oraz $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$.

Intuicja: rachunki z nieskończonością

Przy liczeniu granic możemy umownie traktować ∞ jak bardzo dużą liczbę:

$$a + \infty = \infty, \quad \frac{a}{\pm\infty} = 0, \quad \infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty + \infty = \infty,$$

$$a \cdot \infty = \infty \text{ i } \frac{a}{0^+} = \infty \text{ (dla } a > 0), \quad a \cdot \infty = -\infty \text{ (dla } a < 0).$$

Natomiast wyrażenia

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

są **symbolami nieoznaczonymi** – wynik może być dowolny i trzeba wyrażenie najpierw przekształcić.

Najważniejsza technika: wyłącz najszybciej rosnący składnik.

Przykład 3.8.5.

- (a) $\frac{2n-7}{3n+1}$: mamy $\frac{\infty}{\infty}$. Dzielimy licznik i mianownik przez n : $\frac{2 - \frac{7}{n}}{3 + \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{2-0}{3+0} = \frac{2}{3}$.
 (b) $\frac{3n^3 - n + 4}{5n^3 - 2n} = \frac{3 - \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^3}}{5 - \frac{2}{n^2}} \rightarrow \frac{3}{5}$.
 (c) $n^3 - n^2 + 10n - 1 = n^3 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{10}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) \rightarrow \infty \cdot 1 = \infty$.
 (d) $\frac{2n^2 - 1}{1 - n} = \frac{2n - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} - 1} \rightarrow \frac{\infty}{-1} = -\infty$.

Uwaga 3.8.6 (iloraz wielomianów). Dla $a_p \neq 0 \neq b_q$:

$$\frac{a_p n^p + \dots + a_0}{b_q n^q + \dots + b_0} \rightarrow \begin{cases} 0, & p < q, \\ \frac{a_p}{b_q}, & p = q, \\ \pm\infty \text{ (znak } \frac{a_p}{b_q}), & p > q. \end{cases}$$

Decydują tylko najwyższe potęgi.

Przykład 3.8.7 (sprzężenie przy pierwiastkach). $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ to symbol $\infty - \infty$. Mnożymy i dzielimy przez sumę pierwiastków, korzystając z $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0.$$

Przykład 3.8.8 (potęgi). $\frac{4^n + 5^n}{3^n + 2^n}$: dzielimy przez 3^n (najszybszy wyraz mianownika):

$$\frac{(\frac{4}{3})^n + (\frac{5}{3})^n}{1 + (\frac{2}{3})^n} \rightarrow \frac{\infty + \infty}{1 + 0} = \infty.$$

Twierdzenie 3.8.9 (o trzech ciągach). Jeśli $a_n \leq b_n \leq c_n$ (od pewnego miejsca) oraz $a_n \rightarrow g$ i $c_n \rightarrow g$, to także $b_n \rightarrow g$.

Intuicja

Ciąg „ściśnięty” między dwoma ciągami dążącymi do tej samej granicy nie ma wyjścia – też musi do niej dążyć. (Dlatego bywa nazywane twierdzeniem o dwóch policjantach.)

Przykład 3.8.10. Obliczmy $\lim \sqrt[n]{2^n + 3^n}$. Ponieważ $3^n \leq 2^n + 3^n \leq 3^n + 3^n = 2 \cdot 3^n$, mamy

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = 3 \sqrt[n]{2} \rightarrow 3 \cdot 1 = 3.$$

Zatem $\sqrt[n]{2^n + 3^n} \rightarrow 3$. Ogólnie: pod pierwiastkiem n -tego stopnia „wygrywa” największa podstawa.

Szereg geometryczny.

Twierdzenie 3.8.11. Jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q i $a_1 \neq 0$, to sumy S_n mają granicę wtedy i tylko wtedy, gdy $|q| < 1$. Wówczas

$$S = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Wynika to od razu ze wzoru $S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$, bo $q^n \rightarrow 0$. Np. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$.

W laboratorium: kumulacja leku

Pacjent przyjmuje 100 mg leku co 12 godzin, a czas połowicznej eliminacji wynosi 12 h – do następnej dawki zostaje więc połowa poprzedniej ilości. Tuż po n -tej dawce w organizmie jest

$$100 + 100 \cdot \frac{1}{2} + 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ mg} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{100}{1 - \frac{1}{2}} = 200 \text{ mg}.$$

Ilość leku nie rośnie bez końca, tylko stabilizuje się na poziomie 200 mg – to tzw. **stan stacjonarny**. Lekarze dobierają dawkę i odstęp tak, by stan stacjonarny mieścił się w oknie terapeutycznym.

Zadanie 3.8.12. Oblicz granice ciągów:

(1) $\frac{3}{n} - \frac{10}{\sqrt{n}}$,

(6) $\frac{1 - n^3}{(1 - n)^2}$,

(11) $\frac{2 \cdot 3^{n+1} - 8}{4 \cdot 9^{n-1} + 1}$,

(2) $n^3 - 3n^2 + 10n - 120$,

(7) $\frac{n^2 + 5n - 6}{n^4 + 5n^2 - 6}$,

(12) $\frac{3^{n-1} - 2^{n-2}}{3^n}$,

(3) $\frac{4n - 3}{6 - 5n}$,

(8) $\frac{(\sqrt{n} + 3)^2}{n + 1}$,

(13) $\sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n}$,

(4) $\frac{2n^3 - 4n - 1}{6n + 3n^2 - n^3}$,

(9) $\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}$,

(14) $\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}$,

(5) $\frac{(2n - 1)^2}{(4n - 1)(3n + 2)}$,

(10) $\frac{2^n - 3^n}{5^n + 2^n}$,

(15) $\star \frac{n \sin n!}{n^2 + 1}$.

Zadanie 3.8.13.

(1) Oblicz sumy: $-2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{2}{27} - \dots$, $4 - 3 + \frac{9}{4} - \frac{27}{16} + \dots$

(2) Lek o czasie połowicznej eliminacji 6 h podaje się w dawkach po 100 mg co 12 h. Ile leku jest w organizmie tuż po dawce w stanie stacjonarnym?

Odpowiedź: do następnej dawki zostaje $\frac{1}{4}$, więc $\frac{100}{1 - \frac{1}{4}} \approx 133$ mg.

3.9. Liczba e

Twierdzenie 3.9.1. Ciąg $(1 + \frac{1}{n})^n$ jest zbieżny. Jego granicę oznaczamy literą e :

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718\,281\,828\dots$$

Intuicja: skąd się bierze e

Wyobraź sobie populację, która w ciągu doby rośnie o 100%. Jeśli przyrost „dopisujemy” raz na dobę, populacja się podwaja (czynniki 2). Jeśli co pół doby po 50%, to czynnik wynosi $1,5^2 = 2,25$; co godzinę po $\frac{1}{24}$ – $(1 + \frac{1}{24})^{24} \approx 2,66$. Gdy przyrost jest naliczany w sposób ciągły (jak u żywych komórek, które nie dzielą się wszystkie jednocześnie), czynnik dąży do e . Dlatego e pojawia się wszędzie tam, gdzie coś rośnie lub zanika w tempie proporcjonalnym do swojej aktualnej wielkości.

Liczba e jest niewymierna (wykazał to Euler w XVIII wieku) i nawet przestępna (Hermite, 1873). Funkcję e^x nazywamy często po prostu **eksponentą**, a logarytm przy podstawie e – **logarytmem naturalnym**:

$$\ln x := \log_e x.$$

W laboratorium: wzrost ciągły

Model wzrostu wykładniczego zapisuje się zwykle jako $N(t) = N_0 e^{rt}$, gdzie r to **współczynnik wzrostu**. Związek z czasem generacji: $2 = e^{rT}$, czyli $r = \frac{\ln 2}{T}$. Dla $T = 20$ min mamy $r \approx 0,0347 \text{ min}^{-1}$.

Twierdzenie 3.9.2. (a) Jeśli $a_n \rightarrow 0$ i $a_n \neq 0$, to $(1 + a_n)^{1/a_n} \rightarrow e$.

(b) Jeśli $a_n \rightarrow a > 0$ i $b_n \rightarrow b$, to $a_n^{b_n} \rightarrow a^b$.

Przykład 3.9.3. Obliczmy $\lim (1 - \frac{3}{n})^{n+1}$ – to symbol 1^∞ . Chcemy doprowadzić do postaci z twierdzenia z $a_n = -\frac{3}{n}$:

$$\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n+1} = \left[\left(1 + \frac{-3}{n}\right)^{-n/3}\right]^{-3(n+1)/n}.$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym dąży do e , a wykładnik $-\frac{3(n+1)}{n} \rightarrow -3$. Zatem granica wynosi e^{-3} . Ogólna reguła, którą warto zapamiętać: $(1 + \frac{a}{n})^n \rightarrow e^a$.

Zadanie 3.9.4. Oblicz: $\lim \left(\frac{n+5}{n}\right)^{2n}$, $\lim \left(\frac{2+n^2}{n^2}\right)^{n^2}$, $\lim \left(1 - \frac{5}{n}\right)^{-n-1}$.

4. Elementy rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej

Intuicja

Rachunek różniczkowy odpowiada na pytanie: *jak szybko coś się zmienia?* Jak szybko rośnie hodowla w danej chwili, jak szybko spada stężenie leku, przy jakim stężeniu substratu reakcja przyspiesza najmocniej. Narzędziem jest *pochodna*, a żeby ją zdefiniować, potrzebujemy najpierw pojęcia granicy funkcji.

4.1. Granica funkcji. Ciągłość funkcji

Intuicja

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie a **granice** g , i piszemy

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g,$$

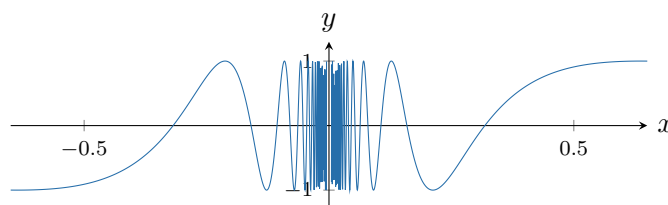
jeśli wartości $f(x)$ zbliżają się do g , gdy x zbliża się do a (z obu stron, ale $x \neq a$). Co ważne, *wartość* $f(a)$ nie gra roli – funkcja może nawet nie być w punkcie a określona.

Dla chętnych: definicja Heinego

Punkt a nazywamy **punktem skupienia** zbioru X , jeśli istnieje ciąg $(x_n) \subset X \setminus \{a\}$ zbieżny do a (czyli do a można „dojść” po punktach dziedziny). Dla takiego a definiujemy: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$, jeśli dla *każdego* ciągu $(x_n) \subset X \setminus \{a\}$ takiego, że $x_n \rightarrow a$, ciąg wartości $f(x_n)$ dąży do g . Ta definicja pozwala przenieść wszystkie twierdzenia o granicach ciągów na granice funkcji.

Przykład 4.1.1. Funkcja $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ nie jest określona w $x = 1$ (dzielenie przez zero), ale ma tam granicę. Dla $x \neq 1$ można skrócić: $\frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1$, a to dla $x \rightarrow 1$ zbliża się do $1 + 1 + 1 = 3$. Zatem $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$.

Przykład 4.1.2. Granica $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ nie istnieje: gdy x zbliża się do zera, $\frac{1}{x}$ ucieka do nieskończoności, a sinus bez końca oscyluje między -1 a 1 (Rysunek 7). Dla $x_n = \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0$ mamy $\sin \frac{1}{x_n} = 0$, a dla $x'_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi} \rightarrow 0$ mamy $\sin \frac{1}{x'_n} = 1$.



Rysunek 7: $y = \sin \frac{1}{x}$ – przy $x \rightarrow 0$ wykres oscyluje coraz szybciej i nie zbliża się do żadnej liczby.

Granice jednostronne. Jeśli x zbliża się do a tylko z prawej strony ($x > a$), mówimy o **granicy prawostronnej** $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, a jeśli tylko z lewej ($x < a$) – o **lewostronnej** $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$. Granica (obustronna) istnieje dokładnie wtedy, gdy obie granice jednostronne istnieją i są równe.

Przykład 4.1.3. Dla $f(x) = \frac{|x|}{x}$ mamy $f(x) = 1$ dla $x > 0$ i $f(x) = -1$ dla $x < 0$. Zatem $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ i granica $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nie istnieje.

Twierdzenie 4.1.4. Jeśli $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = p$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = q$, to granica sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu jest odpowiednio równa $p \pm q$, pq i $\frac{p}{q}$ (ta ostatnia gdy $q \neq 0$).

Definicja 4.1.5. Funkcja f jest **ciągła w punkcie** a swojej dziedziny, jeśli $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Funkcja jest **ciągła**, jeśli jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.

Intuicja

Funkcja ciągła na przedziale to taka, której wykres da się narysować „bez odrywania ołówka”. Ciągłość oznacza też coś bardzo praktycznego: granicę w punkcie dziedziny liczy się po prostu przez *wstawienie* wartości.

Twierdzenie 4.1.6. Wielomiany, funkcje wymierne, potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne i cyklometryczne są ciągłe (w swoich dziedzinach). Suma, różnica, iloczyn, iloraz i złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Przykład 4.1.7. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x^2 - 1) = 8 - 12 - 1 = -5$ – po prostu wstawiamy, bo wielomian jest ciągły. Natomiast funkcja $f(x) = x$ dla $x \neq 1$, $f(1) = 0$ nie jest ciągła w 1: granica wynosi 1, a wartość 0. Funkcja „sklejona” $f(x) = 1$ dla $x < 0$, $f(x) = 2$ dla $x \geq 0$ ma „skok” w zerze, więc tam też nie jest ciągła.

Zadanie 4.1.8. Oblicz granice:

$$\begin{array}{lll} (1) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{16x - x^3}{x^2 + 5x + 4}, & (3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & (5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{27 - x^3}{x - 3}, \\ (2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - 3x + x^2}{2 + x - x^2}, & (4) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x + 1}, & (6) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^3 + 125}{2x^2 - 50}. \end{array}$$

4.2. Granice niewłaściwe. Granice w nieskończoności. Asymptoty

Definicja 4.2.1. Piszemy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (odp. $-\infty$), jeśli wartości $f(x)$ rosną (odp. maleją) nieograniczenie, gdy $x \rightarrow a$. Podobnie dla granic jednostronnych. Jeśli choć jedna z granic jednostronnych w a jest niewłaściwa, prostą $x = a$ nazywamy **asymptotą pionową** funkcji f .

Przykład 4.2.2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, więc $x = 0$ jest asymptotą pionową $y = \frac{1}{x}$. Również $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, a $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan x = +\infty$.

Uwaga 4.2.3 (granica funkcji wymiernej w punkcie a). 1. Wstawiamy $x = a$. Jeśli mianownik $\neq 0$ – gotowe.

2. Jeśli wychodzi $\frac{0}{0}$ – rozkładamy licznik i mianownik na czynniki, skracamy $(x - a)$ i wracamy do kroku 1.

3. Jeśli wychodzi $\frac{c}{0}$ z $c \neq 0$ – granica jest nieskończona; znak ustalamy, badając znaki licznika i mianownika osobno po lewej i po prawej stronie a .

Przykład 4.2.4.

$$(a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 2x}{1 + x^3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x(x + 1)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x^2 - x + 1} = \frac{-2}{3}.$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+4)}{x(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+4}{x(x-3)}$ – tu jest $\frac{7}{0}$. Dla $x \rightarrow 3^-$ mianownik jest małą liczbą ujemną, więc granica to $-\infty$; dla $x \rightarrow 3^+$ – dodatnią, więc $+\infty$. Granica obustronna nie istnieje, a $x = 3$ jest asymptotą pionową.

Definicja 4.2.5. Piszemy $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g$, jeśli $f(x)$ zbliża się do g , gdy x rośnie nieograniczenie (podobnie dla $x \rightarrow -\infty$). Jeśli g jest liczbą, to prostą $y = g$ nazywamy **asymptotą poziomą** (prawostronną lub lewostronną).

Przykład 4.2.6. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, więc $y = 0$ jest asymptotą poziomą hiperboli. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, ale $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$: eksponenta ma asymptotę poziomą tylko lewostronną. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctg x = \pm \frac{\pi}{2}$. Granica $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ nie istnieje.

Dla funkcji wymiernych przy $x \rightarrow \pm\infty$ postępujemy jak przy ciągach: dzielimy licznik i mianownik przez najwyższą potęgę x występującą w mianowniku.

Przykład 4.2.7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x + 7x^2}{4x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 7}{4 - \frac{1}{x^2}} = \frac{7}{4}$, więc $y = \frac{7}{4}$ jest asymptotą poziomą prawostronną.

Definicja 4.2.8. Prostą $y = ax + b$ nazywamy **asymptotą ukośną** prawostronną funkcji f , jeśli $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ – wykres „przykleja się” do prostej. Analogicznie lewostronną dla $x \rightarrow -\infty$.

Twierdzenie 4.2.9. $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną prawostronną f wtedy i tylko wtedy, gdy obie poniższe granice istnieją i są skończone:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax).$$

(Dla lewostronnej – to samo z $x \rightarrow -\infty$.) Asymptota pozioma to przypadek $a = 0$.

Przykład 4.2.10. Dla $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{2x^2}$:

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^3} \right) = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 - 2x^2 + 3}{2x^2} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 + 3}{2x^2} = -1.$$

Asymptotą ukośną (obustronną) jest $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Zadanie 4.2.11.

(1) Wyznacz granice jednostronne: $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{1}{1-x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{x^2 - 4}{(x-2)^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} 2^{1/x}$.

(2) Wyznacz granice: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4}{x^3 - x}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - 2x - 3x^3}{(x-1)(x+1)}$.

(3) Wyznacz wszystkie asymptoty funkcji: $\frac{x}{1-x}$, $\frac{x^2-1}{x-1}$, $\frac{2x-2}{x-2}$, $\frac{x^2+x+1}{1-x}$, $\frac{4}{x^2+x+1}$.

4.3. Pochodna funkcji

Intuicja: szybkość zmian

Jeśli $N(t)$ to liczba bakterii w chwili t , to iloraz

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h}$$

jest *średnią* szybkością wzrostu w przedziale czasu od t do $t+h$ (przyrost liczby bakterii podzielony przez czas). Gdy skracamy ten przedział ($h \rightarrow 0$), dostajemy *chwilową* szybkość wzrostu w chwili t . To jest właśnie pochodna. Tak samo prędkość samochodu to pochodna przebytej drogi, a szybkość reakcji – pochodna stężenia produktu po czasie.

Definicja 4.3.1. Niech f będzie określona na przedziale zawierającym a . **Pochodną funkcji f w punkcie a** nazywamy granicę

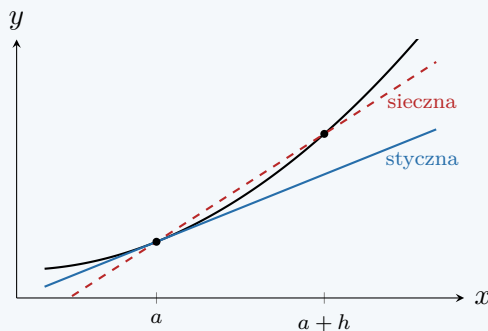
$$f'(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

o ile istnieje i jest skończona. Stosuje się też zapis $\frac{df}{dx}(a)$. Funkcję mającą pochodną w każdym punkcie nazywamy **różniczkowalną**, a funkcję $x \mapsto f'(x)$ – **pochodną** funkcji f .

Intuicja: interpretacja geometryczna

Iloraz $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ to współczynnik kierunkowy siecznej przez punkty $(a, f(a))$ i $(a+h, f(a+h))$. Gdy $h \rightarrow 0$, sieczna obraca się wokół $(a, f(a))$ i dąży do **stycznej**. Zatem $f'(a)$ to współczynnik kierunkowy stycznej (tangens kąta, jaki tworzy ona z osią x), a równanie stycznej to

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



Przykład 4.3.2 (pochodne z definicji). (a) $f(x) = c$ (stała): $\frac{c-c}{h} = 0$, więc $f'(x) = 0$. Stała się nie zmienia.

(b) $f(x) = x^2$: $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h \rightarrow 2x$, więc $(x^2)' = 2x$.

(c) $f(x) = |x|$ nie ma pochodnej w 0: iloraz $\frac{|h|}{h}$ ma granice jednostronne 1 i -1 . Wykres ma tam „ostry róg” i styczna nie istnieje. Funkcja różniczkowalna jest zawsze ciągła, ale – jak widać – nie na odwrót.

Przykład 4.3.3. Styczna do paraboli $y = x^2$ w punkcie $x = 1$: $f'(1) = 2$, $f(1) = 1$, więc $y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$.

W praktyce pochodnych nie liczymy z definicji, tylko z gotowych wzorów.

Twierdzenie 4.3.4 (pochodne funkcji elementarnych).

$$\begin{array}{ll}
 (c)' = 0 & (x^a)' = a x^{a-1} \quad (a \in \mathbb{R}) \\
 (e^x)' = e^x & (a^x)' = a^x \ln a \\
 (\ln x)' = \frac{1}{x} & (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \\
 (\sin x)' = \cos x & (\cos x)' = -\sin x \\
 (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} & (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \\
 (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}
 \end{array}$$

Wniosek 4.3.5. Ze wzoru na $(x^a)'$ dostajemy często używane szczególne przypadki:

$$(x)' = 1, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}, \quad (\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Twierdzenie 4.3.6 (reguły różniczkowania).

$$(cf)' = cf', \quad (f \pm g)' = f' \pm g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Typowy błąd

Pochodna iloczynu to *nie* iloczyn pochodnych: $(x \cdot x)' = 2x$, a $(x)' \cdot (x)' = 1$. We wzorze na pochodną ilorazu w liczniku jest *minus*, więc kolejność składników ma znaczenie.

Przykład 4.3.7.

- (a) $(x^5 - 3x^2 + 7x - 4)' = 5x^4 - 6x + 7$.
- (b) $(\sin x \cos x)' = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$.
- (c) $\left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.
- (d) $(x^2 e^x)' = 2x e^x + x^2 e^x = x e^x (2 + x)$.

Twierdzenie 4.3.8 (pochodna funkcji złożonej, „reguła łańcuchowa”).

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Słownie: *pochodna funkcji zewnętrznej (obliczona w funkcji wewnętrznej) razy pochodna funkcji wewnętrznej*.

Przykład 4.3.9.

- (a) $h(x) = (x^2 - 1)^5$. Zewnętrzna: $(\cdot)^5$, wewnętrzna: $x^2 - 1$. $h'(x) = 5(x^2 - 1)^4 \cdot 2x = 10x(x^2 - 1)^4$.
- (b) $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
- (c) $h(x) = e^{-3x}$. $h'(x) = e^{-3x} \cdot (-3) = -3e^{-3x}$.

$$(d) \quad h(x) = \ln \sin x. \quad h'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x.$$

$$(e) \quad \text{Przy wielu „piętrach” mnożymy pochodne kolejnych pięter: } (\sin^2(3x))' = 2 \sin(3x) \cdot \cos(3x) \cdot 3 = 3 \sin(6x).$$

W laboratorium: szybkość wzrostu populacji

Dla $N(t) = N_0 e^{rt}$ mamy $N'(t) = N_0 e^{rt} \cdot r = r N(t)$. Szybkość wzrostu jest proporcjonalna do aktualnej liczebności – im więcej bakterii, tym szybciej przybywa nowych. To równanie $N' = rN$ jest najprostszym przykładem **równania różniczkowego**; takie równania opisują dynamikę populacji, kinetykę reakcji czy farmakokinetykę.

Zadanie 4.3.10. Oblicz pochodne funkcji:

$$(1) \quad 2x^3 - 6x + 5,$$

$$(6) \quad (x^2 - 2x)^3,$$

$$(11) \quad \sqrt{x^2 - 4x + 3},$$

$$(2) \quad x^2 e^x,$$

$$(7) \quad \ln(x^2 - 4),$$

$$(12) \quad x\sqrt{1-x^2},$$

$$(3) \quad \sin(5x - 3),$$

$$(8) \quad \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1},$$

$$(13) \quad \ln(\ln x),$$

$$(4) \quad e^{x^4 - 2x^2},$$

$$(9) \quad x^{1/2} + x^{2/3},$$

$$(14) \quad \arctg \sqrt{x},$$

$$(5) \quad x - \sin x \cos x,$$

$$(10) \quad x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2} \right),$$

$$(15) \quad \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

4.4. Przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji

Intuicja

Pochodna to nachylenie stycznej. Jeśli jest dodatnia, wykres „idzie w górę” – funkcja rośnie; jeśli ujemna – maleje. W szczytach i dołkach styczna jest pozioma, więc pochodna jest równa zero.

Twierdzenie 4.4.1 (monotoniczność). Niech f będzie różniczkowalna na przedziale P .

- Jeśli $f' > 0$ na P (z wyjątkiem co najwyżej pojedynczych punktów, gdzie $f' = 0$), to f jest silnie rosnąca na P .
- Jeśli $f' < 0$ na P (z tym samym zastrzeżeniem), to f jest silnie malejąca na P .
- Jeśli $f' = 0$ na całym P , to f jest stała na P .

Typowy błąd

Twierdzenie działa tylko na przedziałach. Dla $f(x) = \frac{1}{x}$ mamy $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ wszędzie, ale f nie jest malejąca na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (bo $f(-1) < f(1)$) – jest malejąca osobno na $(-\infty, 0)$ i na $(0, \infty)$. Przedziały monotoniczności podajemy więc osobno, nie łącząc ich znakiem $\cup$.

Przykład 4.4.2. Wyznaczmy przedziały monotoniczności $f(x) = x^3 - 3x^2$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2).$$

Parabola $3x(x - 2)$ ma ramiona w górę i pierwiastki 0, 2: $f' > 0$ na $(-\infty, 0)$ i $(2, \infty)$, $f' < 0$ na $(0, 2)$. Zatem f jest silnie rosnąca na $(-\infty, 0]$ i na $[2, \infty)$, silnie malejąca na $[0, 2]$.

Definicja 4.4.3. Funkcja f ma w punkcie a **maksimum lokalne**, jeśli $f(a) \geq f(x)$ dla wszystkich x z dziedziny dostatecznie bliskich a , i **minimum lokalne**, jeśli $f(a) \leq f(x)$ dla takich x . Maksima i minima lokalne to **ekstrema lokalne**.

Twierdzenie 4.4.4 (warunek konieczny). Jeśli funkcja różniczkowalna f ma ekstremum lokalne w punkcie wewnętrznym a , to $f'(a) = 0$.

Typowy błąd

$f'(a) = 0$ nie wystarcza: $f(x) = x^3$ ma $f'(0) = 0$, ale w zerze nie ma ekstremum – funkcja rośnie po obu stronach.

Twierdzenie 4.4.5 (warunek wystarczający). Jeśli $f'(a) = 0$ i pochodna **zmienia znak** w a :

- z $+$ na $-$ (idąc od lewej do prawej) – w a jest **maksimum** lokalne;
- z $-$ na $+$ – w a jest **minimum** lokalne;
- jeśli znak się nie zmienia – ekstremum nie ma.

Przykład 4.4.6. Wyznamy ekstrema lokalne $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 1$.

Krok 1. $f'(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3)$.

Krok 2. Miejsca zerowe pochodnej: $x = 0$ (dwukrotne) i $x = 3$.

Krok 3: tabela znaków.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

W $x = 0$ pochodna nie zmienia znaku – brak ekstremum. W $x = 3$ zmienia znak z $-$ na $+$ – minimum lokalne $f(3) = \frac{81}{4} - 27 + 1 = -\frac{23}{4}$.

Wartość największa i najmniejsza na przedziale domkniętym. Funkcja ciągła na przedziale $[a, b]$ zawsze osiąga wartość największą i najmniejszą. Aby je znaleźć:

1. znajdujemy punkty z *wewnątrz* (a, b) , w których $f'(x) = 0$;
2. obliczamy wartości f w tych punktach *oraz na końcach* a i b ;
3. największa z tych liczb to wartość największa, najmniejsza – wartość najmniejsza.

Przykład 4.4.7. Największa i najmniejsza wartość $f(x) = e^{2x+7}(x^2 + 2x - 1)$ na $[-4, 1]$. Z reguły iloczynu i łańcuchowej:

$$f'(x) = 2e^{2x+7}(x^2 + 2x - 1) + e^{2x+7}(2x + 2) = 2e^{2x+7}(x^2 + 3x) = 2e^{2x+7}x(x + 3).$$

Zera pochodnej: $x = 0$ i $x = -3$ (oba w przedziale). Wartości: $f(-4) = 7e^{-1}$, $f(-3) = 2e$, $f(0) = -e^7$, $f(1) = 2e^9$. Wartość największa to $2e^9$ (w $x = 1$), najmniejsza to $-e^7$ (w $x = 0$).

Przykład 4.4.8 (optymalizacja). Z kwadratowego arkusza blachy o boku 36 cm wycinamy w rogach kwadraty o boku x i zaginamy boki, tworząc otwarte pudełko. Przy jakim x objętość jest największa?

Model. Podstawa ma bok $36 - 2x$, wysokość x : $V(x) = x(36 - 2x)^2 = 4x(x - 18)^2$, $x \in [0, 18]$.

Pochodna. $V'(x) = 4(x-18)^2 + 8x(x-18) = 4(x-18)(3x-18) = 12(x-18)(x-6)$.

Kandydaci. Wnętrze przedziału: $x = 6$. Końce: $V(0) = V(18) = 0$; $V(6) = 6 \cdot 24^2 = 3456$. Należy wyciąć kwadraty o boku 6 cm; pudełko ma objętość 3456 cm^3 .

W laboratorium: kiedy stężenie leku jest najwyższe?

Po podaniu doustnym stężenie leku we krwi (w mg/L, czas w godzinach) opisuje w uproszczeniu wzór $C(t) = 10te^{-t/2}$, $t \geq 0$: lek najpierw się wchłania, potem jest eliminowany. Z reguły iloczynu

$$C'(t) = 10e^{-t/2} + 10t \cdot e^{-t/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 5e^{-t/2}(2-t).$$

Ponieważ $e^{-t/2} > 0$, znak C' zależy tylko od $2-t$: dodatni dla $t < 2$, ujemny dla $t > 2$. Stężenie jest więc największe po 2 godzinach i wynosi $C(2) = 20e^{-1} \approx 7,4 \text{ mg/L}$. W farmakologii tę wartość nazywa się $C_{\max}$, a moment jej osiągnięcia – $t_{\max}$.

Zadanie 4.4.9.

- (1) Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji: $x(3-x)^2$, $\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$, x^2e^{-x} , $3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 1$, $x\sqrt{4-x^2}$, xe^{-x^2} , $x - \frac{2}{x} - 3\ln x$.
- (2) Wyznacz wartość największą i najmniejszą: $x^3 - 3x - 1$ na $[-2, 3]$, x^2e^x na $[-3, 1]$, $\sin 2x - x$ na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ na $[1, e^{8/3}]$.
- (3) Jakie wymiary powinna mieć puszka w kształcie walca o największej objętości, jeśli na jej wykonanie zużywamy 50 cm^2 blachy?
- (4) Należy zrobić prostopadłościenną skrzynkę z pokrywką o objętości 72 cm^3 , której krawędzie podstawy są w stosunku 2 : 1. Jakie wymiary minimalizują pole powierzchni?
- (5) Stężenie leku opisuje $C(t) = Ate^{-kt}$ ($A, k > 0$). Wykaż, że $t_{\max} = \frac{1}{k}$, i oblicz $C_{\max}$.

Odpowiedź: $C_{\max} = \frac{A}{ke}$.

4.5. Wklęsłość, wypukłość i punkty przegięcia

Definicja 4.5.1. Jeśli f' jest różniczkowalna, to $f'' := (f')'$ nazywamy **drugą pochodną** funkcji f .

Intuicja

Funkcja jest **wypukła**, gdy jej wykres „wygina się w górę” jak miska ($\cup$) – nachylenie stycznej rośnie; **wklęsła**, gdy wygina się w dół jak kopuła ($\cap$) – nachylenie maleje. **Punkt przegięcia** to miejsce, gdzie wypukłość zmienia się na wklęsłość lub odwrotnie. Skoro wypukłość to „rosnąca pochodna”, a o wzroście funkcji decyduje znak *jej* pochodnej, to o wypukłości decyduje znak f'' .

Twierdzenie 4.5.2. Niech f będzie dwukrotnie różniczkowalna na przedziale P . Jeśli $f'' \geq 0$ na P , to f jest wypukła na P ; jeśli $f'' \leq 0$ – wklęsła. Jeśli $f''(a) = 0$ i f'' zmienia znak w a , to a jest punktem przegięcia.

Typowy błąd

Samo $f''(a) = 0$ nie wystarcza: dla $f(x) = x^4$ mamy $f''(0) = 0$, ale $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ po obu stronach – funkcja jest wszędzie wypukła, przegięcia brak.

Przykład 4.5.3. Dla $f(x) = x^3 - 3x^2$: $f''(x) = 6x - 6$. Jest ujemna dla $x < 1$ i dodatnia dla $x > 1$, więc f jest wklęsła na $(-\infty, 1]$, wypukła na $[1, \infty)$, a $x = 1$ jest punktem przegięcia.

W laboratorium: krzywa logistyczna

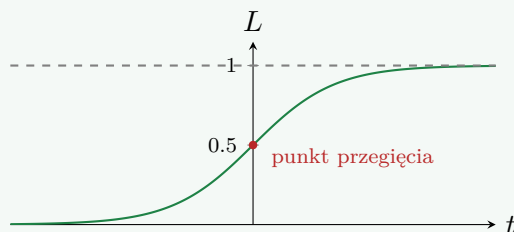
Populacja w środowisku o ograniczonych zasobach nie rośnie wykładniczo w nieskończoność, tylko dąży do pojemności środowiska K . W najprostszym przypadku ($K = 1$, czas w odpowiednich jednostkach) opisuje to **funkcja logistyczna**

$$L(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}.$$

Z reguły łańcuchowej $L'(t) = \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2}$, co – jak łatwo sprawdzić – równa się $L(t)(1 - L(t))$. Różniczkując jeszcze raz: $L''(t) = L'(t)(1 - 2L(t))$. Ponieważ $L' > 0$, znak L'' zależy od $1 - 2L$:

$$L'' > 0 \text{ dla } L < \frac{1}{2}, \quad L'' < 0 \text{ dla } L > \frac{1}{2}.$$

Punkt przegięcia przypada więc tam, gdzie populacja osiąga *połowę* pojemności środowiska. Wtedy przyrost jest najszybszy; dalej przyrost słabnie, bo zaczyna brakować zasobów. Ten sam kształt „litery S” mają krzywe wzrostu hodowli, krzywe wiązania tlenu przez hemoglobinę i krzywe dawka–odpowiedź.



Zadanie 4.5.4. Wyznacz przedziały wypukłości i punkty przegięcia: $x^4 - 24x^2 + 6x + 5$, $x\sqrt{4 - x^2}$, $\frac{5-3x}{x^2-1}$, $3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 1$, xe^{-x} .

4.6. Reguła de l'Hospitala

Twierdzenie 4.6.1 (reguła de l'Hospitala). Jeśli $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)}$ jest symbolem $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$, funkcje u , v są różniczkowalne w pobliżu a i istnieje granica $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$, to

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

Twierdzenie zachodzi także dla granic jednostronnych i dla $a = \pm\infty$.

Typowy błąd

Różniczkujemy licznik i mianownik *osobno* – to nie jest pochodna ilorazu! Przed każdym użyciem reguły sprawdzamy, że naprawdę mamy $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$.

Przykład 4.6.2 (symbole $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$). (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$ (regulę można stosować wielokrotnie).

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ (logarytm rośnie wolniej niż każda potęga).

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$ (eksponenta rośnie szybciej niż każdy wielomian).

Inne symbole nieoznaczone sprowadzamy do $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$:

- $0 \cdot \infty$: $uv = \frac{u}{1/v}$; np. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$.
- $\infty - \infty$: sprowadzamy do wspólnego mianownika; np. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1 - \ln x}{(x-1) \ln x} = \frac{1}{2}$ (dwukrotnie de l'Hospital).
- $1^\infty, 0^0, \infty^0$: korzystamy z $u^v = e^{v \ln u}$ i liczymy granicę wykładnika; np. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$.

Zadanie 4.6.3. Oblicz granice:

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1},$

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^x}{x^7},$

(9) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x},$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1},$

(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2020}}{10^x},$

(10) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{3/x^2},$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3},$

(7) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x \quad (\alpha > 0),$

(11) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(1-x)},$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2},$

(8) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right),$

(12) $\star \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x^x - 1)}{x \ln x}.$

4.7. Badanie przebiegu zmienności funkcji

Zbierzmy wszystko w jeden schemat. Aby zbadać przebieg zmienności funkcji i narysować jej wykres:

- wyznaczamy dziedzinę, miejsca zerowe i punkt przecięcia z osią y ;
- liczymy granice na końcach przedziałów dziedziny;
- wyznaczamy asymptoty (pionowe, poziome, ukośne);
- liczymy f' , wyznaczamy przedziały monotoniczności i ekstrema;
- liczymy f'' , wyznaczamy przedziały wypukłości i punkty przegięcia;
- zbieramy wyniki w tabeli i rysujemy wykres.

Przykład 4.7.1. Zbadajmy $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

(i) Dziedzina: $\mathbb{R}$ (mianownik zawsze ≥ 1). Miejsce zerowe: $x = 0$; przecięcie z osią y : $(0, 0)$. Funkcja jest nieparzysta.

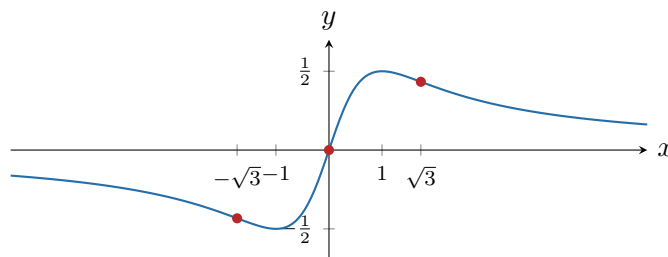
(ii)–(iii) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x + \frac{1}{x}} = 0$, więc $y = 0$ jest asymptotą poziomą. Asymptot pionowych brak (funkcja jest ciągła na $\mathbb{R}$).

(iv) $f'(x) = \frac{(x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{(x^2 + 1)^2}$. Mianownik jest dodatni, więc $f' > 0$ na $(-1, 1)$ i $f' < 0$ poza $[-1, 1]$. Minimum lokalne $f(-1) = -\frac{1}{2}$, maksimum lokalne $f(1) = \frac{1}{2}$.

(v) Po uproszczeniu $f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{(x^2 + 1)^3}$. Zera: $-\sqrt{3}$, 0 , $\sqrt{3}$. Wężyk: $f'' < 0$ na $(-\infty, -\sqrt{3})$ i $(0, \sqrt{3})$ (wkłęsła), $f'' > 0$ na $(-\sqrt{3}, 0)$ i $(\sqrt{3}, \infty)$ (wypukła). Punkty przegięcia: $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$, $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$.

(vi)

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, \infty)$
f'	–	–	–	0	+	+	+	0	–	–	–
f''	–	0	+	+	+	0	–	–	–	0	+
f	$\searrow$	przeg.	$\searrow$	min	$\nearrow$	przeg.	$\nearrow$	max	$\searrow$	przeg.	$\searrow$



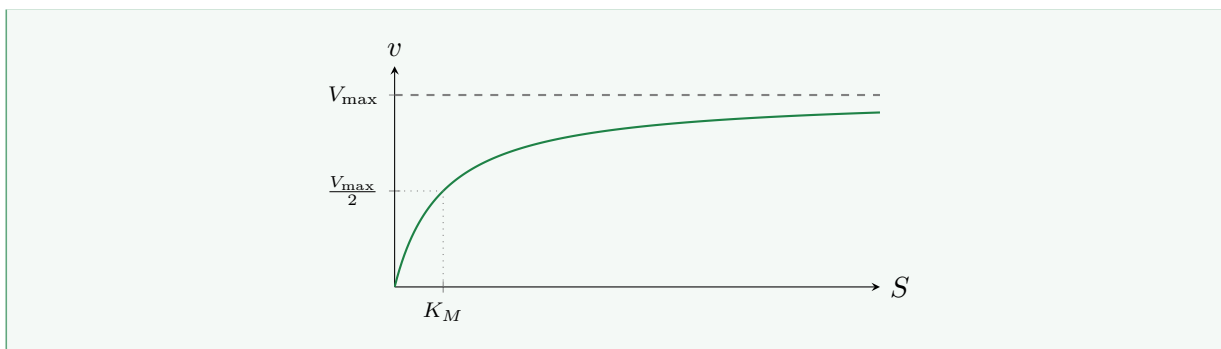
W laboratorium: kinetyka Michaelisa–Menten

Szybkość reakcji enzymatycznej v w zależności od stężenia substratu $S \geq 0$ opisuje wzór

$$v(S) = \frac{V_{\max} S}{K_M + S},$$

gdzie $V_{\max} > 0$ to szybkość maksymalna, a $K_M > 0$ – stała Michaelisa. Zbadajmy tę funkcję.

- $v(0) = 0$: bez substratu reakcja nie zachodzi.
- $\lim_{S \rightarrow \infty} v(S) = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{V_{\max}}{\frac{K_M}{S} + 1} = V_{\max}$: prosta $v = V_{\max}$ jest asymptotą poziomą – enzym się „nasyca”.
- $v'(S) = \frac{V_{\max}(K_M + S) - V_{\max}S}{(K_M + S)^2} = \frac{V_{\max}K_M}{(K_M + S)^2} > 0$: szybkość zawsze rośnie ze stężeniem substratu.
- $v''(S) = -\frac{2V_{\max}K_M}{(K_M + S)^3} < 0$: funkcja jest wkłęsła – każdy kolejny dodatek substratu przyspiesza reakcję coraz mniej.
- $v(K_M) = \frac{V_{\max}K_M}{2K_M} = \frac{V_{\max}}{2}$: **stała Michaelisa to stężenie, przy którym reakcja biegnie z połową szybkości maksymalnej.**



Zadanie 4.7.2.

(1) Zbadaj przebieg zmienności i naszkicuj wykres:

(a) $x^3 + x^2 - 16x$,

(c) $\frac{x^2 + 4x - 5}{x - 3}$,

(e) $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$,

(b) $\frac{3x - 1}{2x + 1}$,

(d) $\frac{3x^2 - 7x + 2}{x + 1}$,

(f) $\frac{x^3}{x^2 - 3}$.

(2) ★Zbadaj przebieg zmienności: $(x - 5)e^{2/(1-x)}$, $\ln |1 - \ln |x||$.

(3) Dla enzymu o $V_{\max} = 10 \mu\text{mol}/\text{min}$ i $K_M = 2 \text{ mM}$: przy jakim stężeniu substratu reakcja osiąga 90% szybkości maksymalnej?

Odpowiedź: $S = 9K_M = 18 \text{ mM}$.

5. Całka funkcji jednej zmiennej

Intuicja

Całka to operacja odwrotna do pochodnej. Jeśli pochodna z liczby bakterii daje szybkość wzrostu, to całka z szybkości wzrostu daje przyrost liczby bakterii. Geometrycznie całka oznaczona to *pole pod wykresem*. W farmakologii pole pod wykresem stężenia leku (AUC, *area under the curve*) mierzy, ile leku faktycznie „zobaczył” organizm.

5.1. Funkcja pierwotna (całka nieoznaczona)

Definicja 5.1.1. Niech f będzie funkcją określoną na przedziale P . Każdą funkcję różniczkowalną F taką, że

$$F'(x) = f(x) \quad \text{dla } x \in P,$$

nazywamy **funkcją pierwotną (całką nieoznaczoną)** funkcji f i zapisujemy $\int f(x) dx = F(x)$. Szukanie funkcji pierwotnej nazywamy **całkowaniem**.

Przykład 5.1.2. $\int \cos x dx = \sin x$, bo $(\sin x)' = \cos x$. $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$, bo $(\frac{1}{3}x^3)' = x^2$.

Uwaga 5.1.3 (stała całkowania). Jeśli F jest funkcją pierwotną f , to $F + C$ też nią jest dla dowolnej stałej C (bo pochodna stałej to zero). Dlatego piszemy

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

W dalszym ciągu często będziemy stałą C pomijać. Wynik całkowania zawsze można **sprawdzić**, różniczkując go – warto to robić.

Twierdzenie 5.1.4 (całki podstawowe).

$$\begin{array}{ll} \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C & (a \neq -1) \\ \int e^x dx = e^x + C & \\ \int \sin x dx = -\cos x + C & \\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C & \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C & \\ \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C & \\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C & \\ \int \cos x dx = \sin x + C & \\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C & \end{array}$$

Twierdzenie 5.1.5 (liniowość). $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$, $\int A f(x) dx = A \int f(x) dx$.

Przykład 5.1.6.

$$(a) \int (x^3 - 5x + 2) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + C.$$

(b) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x \right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + x^2 \right) dx = \ln|x| - \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{1}{3}x^3 + C$. Najpierw rozwinęliśmy kwadrat i zamieniliśmy pierwiastki na potęgi – całki iloczynu *nie* liczy się jako iloczyn całek!

(c) $\int \frac{1+x\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2} dx = \int \left(x^{-2} + x^{-1/2} + x^{-5/3} \right) dx = -\frac{1}{x} + 2\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} + C$.

Typowy błąd

$\int x^{-1} dx$ *nie* liczymy ze wzoru na potęgę (wyszłoby dzielenie przez zero) – to jest $\ln|x|$.

Zadanie 5.1.7. Oblicz całki (i sprawdź wynik różniczkowaniem):

(1) $\int (2 - 6x + 3x^2 - x^3) dx$, (3) $\int \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 dx$, (5) $\int (3 - 5x)\sqrt{x} dx$,
 (2) $\int \left(2x - \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^4}\right) dx$, (4) $\int \frac{x^4 - 2x^3 + x - 3}{x^2} dx$, (6) $\int \frac{5x-1}{\sqrt[3]{x}} dx$.

5.2. Metody całkowania

Całkowanie przez części.

Twierdzenie 5.2.1. Jeśli u i v mają ciągłe pochodne, to

$$\int u v' dx = u v - \int u' v dx.$$

To po prostu wzór na pochodną iloczynu $(uv)' = u'v + uv'$, scałkowany i przekształcony.

Intuicja: co wybrać za u ?

Wzór przerzuca pochodną z jednego czynnika na drugi. Za u wybieramy czynnik, który po zróżniczkowaniu się *upraszcza* (wielomian obniża stopień, $\ln x$ zamienia się w $\frac{1}{x}$), a za v' – taki, który łatwo scałkować (e^x , $\sin x$, $\cos x$). Wyjątek: przy $\ln x$ zawsze bierzemy $u = \ln x$, bo jego całki nie znamy.

Przykład 5.2.2.

- (a) $\int x e^x dx$: $u = x$, $v' = e^x$, więc $u' = 1$, $v = e^x$: $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$.
 (b) $\int x \cos x dx$: $u = x$, $v' = \cos x$, $u' = 1$, $v = \sin x$: $= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$.
 (c) $\int \ln x dx = \int \ln x \cdot 1 dx$: $u = \ln x$, $v' = 1$, $u' = \frac{1}{x}$, $v = x$: $= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$.
 (d) $\int x \ln x dx$: $u = \ln x$, $v' = x$, $v = \frac{1}{2}x^2$: $= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$.
 (e) $\int x^2 \sin x dx$ – części stosujemy dwa razy: $u = x^2$, $v = -\cos x$ daje $-x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx$, a ostatnią całkę policzyliśmy w (b): $\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$.

Uwaga 5.2.3. Całki $\int p(x)e^x dx$, $\int p(x)\sin x dx$, $\int p(x)\cos x dx$ (p – wielomian) liczymy przez części tyle razy, ile wynosi stopień p , za każdym razem biorąc $u =$ wielomian.

Zadanie 5.2.4. Oblicz przez części: $\int x \sin x dx$, $\int (x^2 - 1) \cos x dx$, $\int x^2 e^x dx$, $\int x^n \ln x dx$ ($n \in \mathbb{N}$), $\int x e^{-x} dx$.

Całkowanie przez podstawienie.

Twierdzenie 5.2.5. Jeśli f jest ciągła, a g ma ciągłą pochodną, to

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(t) dt \Big|_{t=g(x)}.$$

Intuicja

To reguła łańcuchowa „od tyłu”. Szukamy w funkcji podcałkowej jakiejś funkcji wewnętrznej $g(x)$, której pochodna również stoi pod całką (jako czynnik). W praktyce postępujemy rachunkowo:

1. wybieramy $t = g(x)$;
2. różniczkujemy: $dt = g'(x) dx$;
3. zamieniamy wszystko na t (ma nie zostać żadne x), całkujemy;
4. wracamy do zmiennej x .

Przykład 5.2.6.

- (a) $\int 2x\sqrt{1+x^2} dx$. Niech $t = 1 + x^2$; wtedy $dt = 2x dx$, więc $\int \sqrt{t} dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}(1 + x^2)^{3/2} + C$.
- (b) $\int e^{-3x} dx$. Niech $t = -3x$, $dt = -3 dx$, czyli $dx = -\frac{1}{3} dt$: $\int e^t \cdot (-\frac{1}{3}) dt = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$.
- (c) $\int \frac{dx}{ax+b}$ ($a \neq 0$). Niech $t = ax + b$, $dx = \frac{1}{a} dt$: $\frac{1}{a} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$.
- (d) $\int \sin^3 x \cos x dx$. Niech $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$: $\int t^3 dt = \frac{1}{4} \sin^4 x + C$.

Wniosek 5.2.7 (przydatny wzór). Gdy w liczniku stoi pochodna mianownika ($t = g(x)$):

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + C. \quad \text{Np.} \quad \int \frac{x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + C.$$

Zadanie 5.2.8. Oblicz całki, stosując podane podstawienie:

- | | |
|--|---|
| (1) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+4} dx$, $t = x^2 - 3x + 4$, | (6) $\int x^2 \sin x^3 dx$, $t = x^3$, |
| (2) $\int x\sqrt{ax^2+b} dx$, $t = ax^2 + b$, | (7) $\int e^{ax+b} dx$, $t = ax + b$, |
| (3) $\int \sin(ax+b) dx$, $t = ax + b$, | (8) $\int \frac{dx}{4x^2+9}$, $t = \frac{2}{3}x$, |
| (4) $\int \lg x dx$, $t = \cos x$, | (9) $\int x\sqrt{x-3} dx$, $t = \sqrt{x-3}$, |
| (5) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$, $t = 1 + \sin x$, | (10) $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx$, $t = \cos x$. |

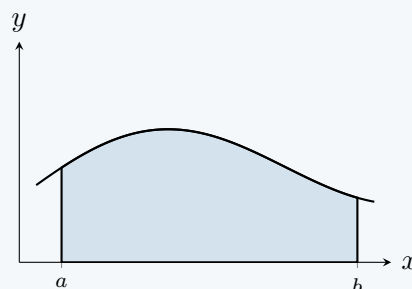
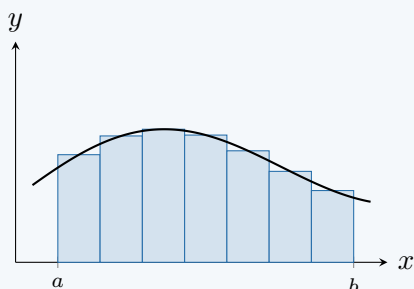
5.3. Całka oznaczona

Intuicja: pole pod wykresem

Chcemy obliczyć pole obszaru pod wykresem dodatniej funkcji f nad przedziałem $[a, b]$. Dzielimy przedział na wąskie paski, każdy pasek zastępujemy prostokątem o wysokości równej wartości funkcji w którymś punkcie paska i sumujemy pola prostokątów. Im węższe paski, tym lepsze przybliżenie; w granicy dostajemy dokładne pole. Tę granicę nazywamy **całką**

oznaczoną i oznaczamy

$$\int_a^b f(x) dx.$$



Symbol $\int$ to wydłużona litera S (od *summa*), a dx przypomina o szerokości „nieskończenie wąskiego” paska.

Dla chętnych: całka Riemanna

Niech f będzie ograniczona na $[a, b]$. Dla podziału $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ i dowolnie wybranych punktów $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ tworzymy **sumę pośrednią** $\sigma = \sum_{j=1}^m f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$. Jeśli przy długości najdłuższego odcinka podziału dążącej do zera sumy pośrednie zawsze dążą do tej samej liczby (niezależnie od wyboru podziałów i punktów ξ_j), to tę liczbę nazywamy **całką Riemanna** $\int_a^b f(x) dx$, a f – funkcją **całkowalną**. Każda funkcja ciągła na $[a, b]$ jest całkowalna. Przykładem funkcji niecałkowalnej jest funkcja równa 1 w punktach wymiernych i 0 w niewymiernych: wybierając ξ_j wymierne, dostajemy sumy równe $b - a$, a niewymierne – sumy równe 0. Ścisłe pojęcie pola zbioru (tzw. miara Jordana) definiuje się podobnie, pokrywając zbiór coraz drobniejszymi prostokątami.

Uwaga 5.3.1. Jeśli f przyjmuje wartości ujemne, to części pola *pod* osią x liczą się w całce ze znakiem minus. Np. $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$, bo „górną” część pola (nad $[0, \pi]$) i „dolną” (nad $[\pi, 2\pi]$) są równe.

Twierdzenie 5.3.2 (własności całki oznaczonej).

$$\int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g, \quad \int_a^b A f = A \int_a^b f, \quad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad (a < c < b).$$

Najważniejsze twierdzenie tego rozdziału łączy całkę oznaczoną (pole) z funkcją pierwotną (odwrotnością pochodnej):

Twierdzenie 5.3.3 (podstawowe twierdzenie rachunku całkowego, wzór Newtona–Leibniza). Jeśli f jest ciągła na $[a, b]$, a F jest dowolną jej funkcją pierwotną, to

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

Intuicja

Jeśli $f = F'$ to szybkość zmian wielkości F , to suma przyrostów na małych odcinkach ($\approx f(x) \Delta x$) daje łączny przyrost $F(b) - F(a)$. Pole pod wykresem *szybkości* to całkowita *zmiana*.

Przykład 5.3.4.

$$(a) \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

(b) $\int_0^\pi \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$. Pole pod jednym „łukiem” sinusoidy wynosi dokładnie 2.

(c) $\int_0^1 x e^x \, dx = (x e^x - e^x) \Big|_0^1 = (e - e) - (0 - 1) = 1$ (funkcja pierwotna z poprzedniego podrozdziału).

Typowy błąd

Stałej całkowania C w całce oznaczonej nie piszemy – i tak się skraca: $(F(b)+C)-(F(a)+C) = F(b) - F(a)$. Wynikiem całki oznaczonej jest *liczba*, a nie funkcja.

Zadanie 5.3.5. Oblicz:

(1) $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$,

(4) $\int_0^\pi x \sin x \, dx$,

(7) $\int_0^1 (1 - \sqrt{x})^2 \, dx$,

(2) $\int_1^2 \frac{1}{x^2} \, dx$,

(5) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$,

(8) $\int_{-1}^1 (4x^2 - 2x)e^{2x} \, dx$,

(3) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \, dx$,

(6) $\int_1^e \ln x \, dx$,

(9) $\int_0^2 \frac{x}{x^2+1} \, dx$.

Wskazówka do (5): $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

5.4. Zastosowania całki oznaczonej

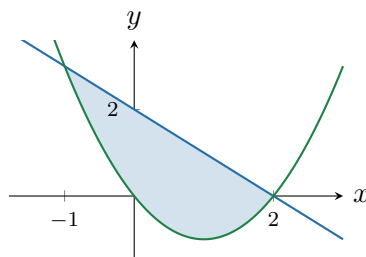
Twierdzenie 5.4.1 (pole między wykresami). Jeśli $g(x) \leq f(x)$ dla $x \in [a, b]$, to pole obszaru między wykresami wynosi

$$|D| = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx \quad (\text{„górna minus dolna”}).$$

Przykład 5.4.2. Obliczmy pole obszaru ograniczonego parabolą $y = x^2 - 2x$ i prostą $y = -x + 2$.

Krok 1: punkty przecięcia. $x^2 - 2x = -x + 2 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff x = -1$ lub $x = 2$.

Krok 2: która funkcja jest wyżej? Dla $x = 0$ (między -1 a 2): prosta ma wartość 2, parabola 0 – prosta jest wyżej. Szkic zawsze pomaga:



Krok 3: całka.

$$\begin{aligned} |D| &= \int_{-1}^2 ((-x + 2) - (x^2 - 2x)) \, dx = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) \, dx \\ &= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6} \right) = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

W laboratorium: pole pod krzywą (AUC)

Po dożylnym podaniu leku jego stężenie we krwi maleje wykładniczo: $C(t) = C_0 e^{-kt}$. Niech $C_0 = 8 \text{ mg/L}$, $k = 0,2 \text{ h}^{-1}$. Miarą całkowitej ekspozycji organizmu na lek w ciągu pierwszych 10 godzin jest

$$\text{AUC}_{0-10} = \int_0^{10} 8e^{-0,2t} dt = 8 \cdot \frac{e^{-0,2t}}{-0,2} \Big|_0^{10} = -40(e^{-2} - 1) = 40(1 - e^{-2}) \approx 34,6 \text{ mg} \cdot \text{h/L}.$$

Średnie stężenie w tym czasie to pole podzielone przez długość przedziału: $\frac{34,6}{10} \approx 3,46 \text{ mg/L}$. Ogólnie średnią wartość funkcji na $[a, b]$ definiuje się jako $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Dla chętnych: całka niewłaściwa

Całkowitą ekspozycję „do końca” liczy się jako granicę: $\int_0^\infty f(t) dt := \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t) dt$. W ramce powyżej $\int_0^T 8e^{-0,2t} dt = 40(1 - e^{-0,2T}) \rightarrow 40$, więc $\text{AUC}_{0-\infty} = \frac{C_0}{k} = 40 \text{ mg} \cdot \text{h/L}$, choć przedział całkowania jest nieskończony. Porównując AUC po podaniu doustnym i dożylnym, wyznacza się biodostępność leku.

W laboratorium: od szybkości do ilości

Bioreaktor wytwarza białko w tempie $p(t) = 100e^{t/10} \text{ mg/h}$ (t w godzinach). Ile białka powstanie w ciągu pierwszych 10 godzin? Szybkość to pochodna ilości, więc ilość to całka z szybkości:

$$\int_0^{10} 100e^{t/10} dt = 1000e^{t/10} \Big|_0^{10} = 1000(e - 1) \approx 1718 \text{ mg}.$$

Zadanie 5.4.3.

- (1) Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi: (a) $y = x^2$ i $y = x$; (b) $y = 2(x+1)^2$ i $y = (x+1)^2 + 4$; (c) $x + y = 9$ i $xy = 14$; (d) $y = 6x\sqrt{1-x^2}$, $0 \leq x \leq 1$, i osią x ; (e) $y^2 = 4x$ i $y = 2x - 4$ (wskazówka: rozbij obszar prostą $x = 1$; wynik: 9).
- (2) Stężenie leku po podaniu doustnym opisuje $C(t) = 10te^{-t/2} \text{ mg/L}$ (por. Podrozdział 4.4). Oblicz AUC_{0-6} .

Odpowiedź: $40 - 160e^{-3} \approx 32,0 \text{ mg} \cdot \text{h/L}$ (całkowanie przez części).

- (3) Szybkość wzrostu masy hodowli wynosi $m'(t) = 0,3e^{0,3t} \text{ g/h}$. O ile wzrośnie masa hodowli między 2. a 5. godziną?

Odpowiedź: $e^{1,5} - e^{0,6} \approx 2,66 \text{ g}$.

6. Funkcje dwóch zmiennych

Intuicja

W laboratorium rzadko coś zależy od jednego czynnika. Wydajność hodowli zależy od temperatury i pH, szybkość reakcji – od stężeń dwóch substratów. Funkcja dwóch zmiennych $f(x, y)$ przypisuje każdej parze liczb (x, y) jedną liczbę. Jej wykres to już nie krzywa, ale *powierzchnia* w przestrzeni – coś jak mapa terenu, na której $f(x, y)$ jest wysokością nad punktem (x, y) .

6.1. Zbiory na płaszczyźnie. Dziedzina i wykres

Dziedziny funkcji dwóch zmiennych są podzbiórmi płaszczyzny $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Przydadzą się następujące zbiory:

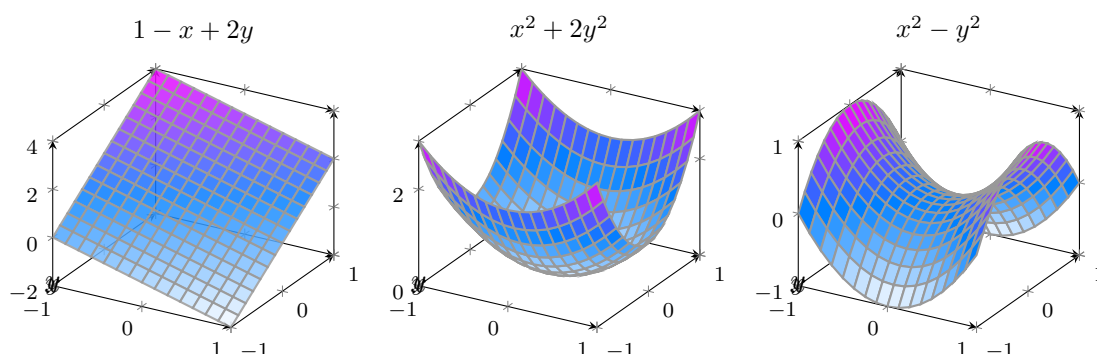
- **koło otwarte** (bez brzegu) o środku (x_0, y_0) i promieniu $r > 0$: $\{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$;
- **okrąg**: $\{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$;
- **prostokąt domknięty**: $[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

Nierówność $y > g(x)$ opisuje obszar *nad* wykresem funkcji g , a $y < g(x)$ – *pod* nim.

Przykład 6.1.1. Zbiór $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 2x\}$: przenosimy $2x$ na lewo i uzupełniamy do kwadratu: $x^2 - 2x + 1 + y^2 < 1$, czyli $(x - 1)^2 + y^2 < 1$. To koło otwarte o środku $(1, 0)$ i promieniu 1.

Definicja 6.1.2. Funkcją dwóch zmiennych nazywamy przyporządkowanie $(x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$, określone dla (x, y) z pewnego zbioru $A \subset \mathbb{R}^2$. Jeśli podajemy tylko wzór, dziedziną jest zbiór tych par, dla których wzór ma sens. Wykresem jest zbiór punktów przestrzeni $\{(x, y, z) : (x, y) \in A, z = f(x, y)\}$.

Przykład 6.1.3. $f(x, y) = \frac{1}{x-y}$ jest określona na całej płaszczyźnie z wyjątkiem prostej $y = x$; $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ – na kole domkniętym $x^2 + y^2 \leq 1$; $h(x, y) = \ln(xy)$ – tam, gdzie $xy > 0$, czyli w I i III ćwiartce (bez osi).



Rysunek 8: Wykresy: płaszczyzna, paraboloida eliptyczna (dołek z minimum w $(0, 0)$) i „siodło” (w $(0, 0)$ nie ma ekstremum).

Intuicja: poziomice

Zamiast rysować powierzchnię, często rysuje się **poziomice** – krzywe $f(x, y) = c$ dla kilku wartości c , jak warstwicę na mapie turystycznej. Dla $h(x, y) = x^2 + 2y^2$ poziomice są elipsy $x^2 + 2y^2 = c$, a przekroje płaszczyznami $y = 0$ i $x = 0$ to parabole $z = x^2$ i $z = 2y^2$.

Zadanie 6.1.4.

- (1) Narysuj zbiory: $x^2 + y^2 \geq y$, $|x| < y$, $|x| + |y| = 1$, $\max\{|x|, |y|\} < 1$, $xy < 2$.
 (2) Wyznacz i narysuj dziedziny: $\ln(xy)$, $\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, $\frac{1}{1-e^{x+y}}$, $\sqrt{y-x^2}$.

6.2. Pochodne cząstkowe

Intuicja

Jak zmienia się $f(x, y)$, gdy zmieniamy *tylko* x , a y trzymamy w miejscu? Wtedy f staje się zwykłą funkcją jednej zmiennej x i możemy policzyć jej pochodną. Tak działa każdy porządny eksperyment: zmieniamy jeden czynnik, pozostałe utrzymujemy stałe.

Definicja 6.2.1. Pochodną cząstkową funkcji f względem x w punkcie (x_0, y_0) nazywamy

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

a względem y :

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

W praktyce: licząc f'_x , traktujemy y jak stałą (jak liczbę) i różniczkujemy po x zwykłymi wzorami; licząc f'_y – odwrotnie.

Przykład 6.2.2.

- (a) $f(x, y) = x^2 - xy + 3y^2$. $f'_x = 2x - y$ ($3y^2$ to „stała”, więc znika; xy to „stała razy x ”),
 $f'_y = -x + 6y$. W punkcie $(1, 2)$: $f'_x(1, 2) = 0$, $f'_y(1, 2) = 11$.
 (b) $f(x, y) = x \sin y + e^{xy}$. $f'_x = \sin y + ye^{xy}$, $f'_y = x \cos y + xe^{xy}$.
 (c) $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln \frac{x-y}{x+y} = \frac{1}{2} (\ln(x-y) - \ln(x+y))$. $f'_x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} \right) = \frac{y}{x^2-y^2}$, $f'_y = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{x-y} - \frac{1}{x+y} \right) = \frac{-x}{x^2-y^2}$.

Definicja 6.2.3. Pochodne cząstkowe pochodnych cząstkowych to **pochothane cząstkowe drugiego rzędu**:

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f'_x)'_x, \quad f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (f'_x)'_y, \quad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (f'_y)'_x, \quad f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (f'_y)'_y.$$

Pochodne f''_{xy} i f''_{yx} nazywamy **mieszanymi**.

Uwaga 6.2.4. Dla wszystkich funkcji, którymi będziemy się zajmować (mających ciągle pochodne drugiego rzędu), pochodne mieszane są równe: $f''_{xy} = f''_{yx}$. To dobry sposób na sprawdzenie rachunków.

Przykład 6.2.5. $f(x, y) = x^2y - 3xy^2 - 2x^2$: $f'_x = 2xy - 3y^2 - 4x$, $f'_y = x^2 - 6xy$,

$$f''_{xx} = 2y - 4, \quad f''_{yx} = 2x - 6y, \quad f''_{xy} = 2x - 6y, \quad f''_{yy} = -6x.$$

Zadanie 6.2.6.

- (1) Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu: $x^2y + 4xy^3$, $x^3 - 2x^2y + 3y^2 - 5x$, $\frac{xy}{x^2+y^2}$, $(3x-y)\ln(x^2+y^2)$, $\ln \frac{x}{y}$.
- (2) Oblicz pochodne cząstkowe drugiego rzędu: $x^4 - 3x^2y^2 + 2xy^2$, $\frac{x-y}{x+y}$, e^{xy} , $\ln(x^2+y^2)$, $\arctg \frac{y}{x}$.

6.3. Ekstrema funkcji dwóch zmiennych

Definicja 6.3.1. Funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) **maksimum lokalne**, jeśli $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ dla wszystkich (x, y) z pewnego koła o środku (x_0, y_0) , i **minimum lokalne**, jeśli $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ w takim kole. (Jeśli nierówności są ostre poza samym środkiem – mówimy o ekstremum właściwym.)

Twierdzenie 6.3.2 (warunek konieczny). Jeśli f ma ekstremum lokalne w (x_0, y_0) i ma tam pochodne cząstkowe, to

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{ i } \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Punkty spełniające ten układ nazywamy **punktami krytycznymi** (stacjonarnymi).

Intuicja

Na szczycie góry i na dnie dołka teren jest płaski w każdym kierunku, w szczególności „na wschód” (x) i „na północ” (y). Ale płasko jest też na przełęczy (w siodle), gdzie w jednym kierunku idziemy w górę, a w drugim w dół – tam ekstremum nie ma (Rysunek 8, prawy). Np. $f(x, y) = xy$ ma $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, ale w $(0, 0)$ nie ma ekstremum.

Definicja 6.3.3. Wyróżnikiem funkcji f nazywamy wyznacznik

$$w = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2.$$

Twierdzenie 6.3.4 (warunek wystarczający). Niech (x_0, y_0) będzie punktem krytycznym funkcji o ciągłych pochodnych drugiego rzędu.

- Jeśli $w(x_0, y_0) > 0$, to w (x_0, y_0) jest ekstremum: **minimum**, gdy $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, **maksimum**, gdy $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$.
- Jeśli $w(x_0, y_0) < 0$, to ekstremum nie ma (punkt siodłowy).
- Jeśli $w(x_0, y_0) = 0$, twierdzenie nie rozstrzyga – trzeba zbadać funkcję inaczej.

Intuicja: skąd ten znak?

Dla funkcji jednej zmiennej $f'' > 0$ oznacza „miskę” (minimum), a $f'' < 0$ – „kopułę” (maksimum). W dwóch wymiarach $w > 0$ mówi, że w każdym kierunku kształt jest ten sam (miska albo kopuła), a znak f''_{xx} rozstrzyga który. $w < 0$ oznacza siodło.

Przykład 6.3.5. Wyznaczmy ekstrema lokalne $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 6xy$.

Krok 1: punkty krytyczne.

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 \\ f'_y = 6xy - 6x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ x(y - 1) = 0. \end{cases}$$

Z drugiego równania $x = 0$ lub $y = 1$. Jeśli $x = 0$: $y(y - 2) = 0$, więc $y = 0$ lub $y = 2$. Jeśli $y = 1$: $x^2 - 1 = 0$, więc $x = \pm 1$. Punkty krytyczne: $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$.

Krok 2: wyróżnik. $f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = 6y - 6$, $f''_{yy} = 6x$, więc $w = 36x^2 - 36(y - 1)^2$.

Krok 3: badamy każdy punkt.

punkt	w	f''_{xx}	wniosek
$(0, 0)$	-36		brak ekstremum
$(0, 2)$	-36		brak ekstremum
$(-1, 1)$	36	-6	maksimum lokalne, $f(-1, 1) = 2$
$(1, 1)$	36	6	minimum lokalne, $f(1, 1) = -2$

Przykład 6.3.6 (gdy $w = 0$). Dla $f(x, y) = x^3 + y^3$ jedynym punktem krytycznym jest $(0, 0)$ i $w(0, 0) = 0$. Ale $f(x, 0) = x^3$ jest dodatnie dla $x > 0$ i ujemne dla $x < 0$, a $f(0, 0) = 0$ – w każdym kole wokół $(0, 0)$ są punkty z wartościami większymi i mniejszymi, więc ekstremum nie ma. Natomiast dla $f(x, y) = 2x^4 + 3y^6$ też $w(0, 0) = 0$, ale $f(x, y) > 0 = f(0, 0)$ dla $(x, y) \neq (0, 0)$ – w $(0, 0)$ jest minimum.

W laboratorium: krzywa kalibracyjna – metoda najmniejszych kwadratów

Oznaczając stężenie białka metodą Bradford, mierzymy absorbcję y dla roztworów wzorcowych o znanych stężeniach x (mg/ml):

x_i	0	0,5	1	1,5	2
y_i	0,02	0,27	0,49	0,77	0,98

Punkty leżą prawie na prostej, ale nie dokładnie (błędy pomiaru). Którą prostą $y = ax + b$ wybrać? Taką, dla której suma kwadratów odchyleń

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^5 (y_i - ax_i - b)^2$$

jest najmniejsza – to funkcja dwóch zmiennych a i b ! Liczymy pochodne cząstkowe (reguła łańcuchowa):

$$S'_a = -2 \sum x_i (y_i - ax_i - b) = 0, \quad S'_b = -2 \sum (y_i - ax_i - b) = 0,$$

co daje układ równań liniowych

$$\begin{cases} a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i \\ a \sum x_i + b n = \sum y_i \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 7,5a + 5b = 3,74 \\ 5a + 5b = 2,53. \end{cases}$$

Odejmując równania: $2,5a = 1,21$, $a = 0,484$, a stąd $b = 0,022$. Wyróżnik: $S''_{aa} = 2 \sum x_i^2 = 15$, $S''_{bb} = 2n = 10$, $S''_{ab} = 2 \sum x_i = 10$, $w = 150 - 100 = 50 > 0$ i $S''_{aa} > 0$ – to rzeczywiście minimum.

Krzywa kalibracyjna: $y = 0,484x + 0,022$. Próbkę o absorbcji 0,60 ma więc stężenie $x = \frac{0,60 - 0,022}{0,484} \approx 1,19$ mg/ml. Dokładnie tak działa funkcja „linia trendu” w arkuszu kalkulacyjnym.

Zadanie 6.3.7.

(1) Wyznacz ekstrema lokalne:

- (a) $x^2 + y^2 - 2x + 6y$, (c) $6xy - x^3 - y^3$, (e) $\frac{4}{x} - \frac{12}{y} + x - 4y^3$,
 (b) $x^2y(4 - x + y)$, (d) $x^4 + y^4 - 4xy$, (f) $x^4 + y^6$.

- (2) Wyznacz prostopadłościan o największej objętości, którego pole powierzchni wynosi 54.
 (3) Metodą najmniejszych kwadratów dopasuj prostą $y = ax + b$ do punktów $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$.

Odpowiedź: $y = 1,5x + \frac{1}{3}$.

Wartość największa i najmniejsza na zbiorze domkniętym. Funkcja ciągła na zbiorze domkniętym i ograniczonym (np. trójkącie, prostokącie, kole wraz z brzegiem) osiąga wartość największą i najmniejszą. Mogą one leżeć wewnątrz zbioru (wtedy w punkcie krytycznym) albo na brzegu. Algorytm:

1. znajdujemy punkty krytyczne leżące *wewnątrz* zbioru;
2. dzielimy brzeg na kawałki opisane wzorami typu $y = p(x)$ lub $x = q(y)$; na każdym kawałku f staje się funkcją jednej zmiennej – szukamy zer jej pochodnej i dołączamy końce kawałków (np. wierzchołki trójkąta);
3. obliczamy f we wszystkich znalezionych punktach i wybieramy największą i najmniejszą wartość.

Przykład 6.3.8. Wartość największa i najmniejsza $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ na trójkącie domkniętym T ograniczonym prostymi $x = 0$, $y = 0$, $x + y + 3 = 0$ (wierzchołki $(0, 0)$, $(-3, 0)$, $(0, -3)$).

Wnętrze. $f'_x = 2x - y + 1 = 0$, $f'_y = 2y - x + 1 = 0$. Z pierwszego $y = 2x + 1$; wstawiamy: $4x + 2 - x + 1 = 0$, $x = -1$, $y = -1$. Punkt $A = (-1, -1)$ leży wewnątrz T ; $f(A) = -1$.

Brzeg.

- bok $x = 0$, $y \in [-3, 0]$: $g(y) = y^2 + y$, $g'(y) = 2y + 1 = 0$ dla $y = -\frac{1}{2}$; $f(0, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$;
- bok $y = 0$, $x \in [-3, 0]$: $h(x) = x^2 + x$, zero pochodnej w $x = -\frac{1}{2}$; $f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$;
- bok $y = -x - 3$, $x \in [-3, 0]$: $i(x) = f(x, -x - 3) = 3x^2 + 9x + 6$, $i'(x) = 6x + 9 = 0$ dla $x = -\frac{3}{2}$; $f(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$;
- wierzchołki: $f(0, 0) = 0$, $f(-3, 0) = 6$, $f(0, -3) = 6$.

Wniosek. Wartość największa 6 (w wierzchołkach $(-3, 0)$ i $(0, -3)$), najmniejsza -1 (w punkcie $(-1, -1)$).

Zadanie 6.3.9. Wyznacz wartość największą i najmniejszą: $2xy$ na kole $x^2 + y^2 \leq 1$; $x^2 + y^2$ na zbiorze $|x| + |y| \leq 1$; $x^2 - 2y^2 + 3x - 6$ na kole $x^2 + y^2 \leq 9$.

7. Całka funkcji dwóch zmiennych

Intuicja

Całka pojedyncza $\int_a^b f(x) dx$ to pole pod wykresem nad odcinkiem. Całka podwójna $\iint_D f(x, y) dx dy$ to *objętość* bryły pod wykresem funkcji f (powierzchnią) nad obszarem D na płaszczyźnie. Jeśli f to gęstość (np. liczba komórek na cm^2 dna naczynia hodowlanego), to całka podwójna daje całkowitą ilość (liczbę komórek na całym dnie). Dobra wiadomość: całki podwójne liczy się, wykonując po kolei dwie zwykłe całki pojedyncze.

7.1. Całka podwójna i jej interpretacja

Dla chętnych: definicja

Niech f będzie ograniczona na prostokącie $P = [a, b] \times [c, d]$. Dzielimy P na małe prostokąty $P_1, \dots, P_m$, w każdym wybieramy punkt (x_j, y_j) i tworzymy sumę pośrednią $\sigma = \sum_{j=1}^m f(x_j, y_j) |P_j|$, gdzie $|P_j|$ to pole P_j (każdy składnik to objętość cienkiego słupka). Jeśli przy coraz drobniejszych podziałach sumy pośrednie zawsze dążą do tej samej liczby, nazywamy ją **całką podwójną** $\iint_P f(x, y) dx dy$. Dla ograniczonego zbioru $E \subset P$ definiujemy $\iint_E f$ jako całkę po P z funkcji równej f na E i 0 poza E .

Twierdzenie 7.1.1 (interpretacja geometryczna). Jeśli $f(x, y) \geq 0$ na zbiorze D , to $\iint_D f(x, y) dx dy$ jest objętością bryły $\{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$. W szczególności $\iint_D 1 dx dy$ to pole zbioru D .

Twierdzenie 7.1.2 (własności). Całka podwójna jest liniowa: $\iint_D (f \pm g) = \iint_D f \pm \iint_D g$, $\iint_D Af = A \iint_D f$. Jeśli D jest podzielony na dwa rozłączne kawałki D_1, D_2 , to $\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$.

7.2. Obliczanie całek podwójnych

Całka po prostokącie.

Twierdzenie 7.2.1 (Fubiniego). Jeśli f jest ciągła na prostokącie $P = [a, b] \times [c, d]$, to

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Prawe strony to **całki iterowane**; zapisujemy je też jako $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$.

Intuicja

Najpierw całkujemy „wewnętrzzną” całkę po y , traktując x jak stałą (zupełnie jak przy pochodnych cząstkowych) – to daje pole przekroju bryły płaszczyzną „ $x = \text{const}$ ”. Potem całkujemy te pola przekrojów po x , co daje objętość (jak krojenie chleba na kromki i dodawanie ich objętości). Kolejność całkowania na prostokącie nie ma znaczenia.

Przykład 7.2.2. Obliczmy $\iint_P (1 - xy^2) dx dy$ dla $P = [-2, 3] \times [0, 1]$ na dwa sposoby.

Najpierw po y .

$$\begin{aligned}\int_{-2}^3 dx \int_0^1 (1 - xy^2) dy &= \int_{-2}^3 \left(y - \frac{1}{3}xy^3 \right) \Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_{-2}^3 \left(1 - \frac{1}{3}x \right) dx \\ &= \left(x - \frac{1}{6}x^2 \right) \Big|_{-2}^3 = \frac{3}{2} - \left(-\frac{8}{3} \right) = \frac{25}{6}.\end{aligned}$$

Najpierw po x .

$$\int_0^1 dy \int_{-2}^3 (1 - xy^2) dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}x^2y^2 \right) \Big|_{x=-2}^{x=3} dy = \int_0^1 \left(5 - \frac{5}{2}y^2 \right) dy = 5 - \frac{5}{6} = \frac{25}{6}.$$

Typowy błąd

Po obliczeniu wewnętrznej całki po y podstawiamy granice za y – warto pisać $\Big|_{y=0}^{y=1}$, żeby się nie pomylić. W wyniku wewnętrznej całki nie może już zostać zmienna, po której całkowaliśmy.

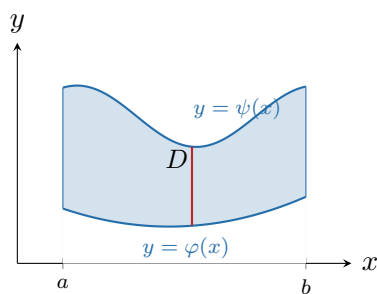
Zadanie 7.2.3. Oblicz całki iterowane: $\int_0^4 dx \int_4^{12} xy dy$, $\int_0^a dx \int_0^b xy(x - y) dy$, $\int_1^3 dx \int_1^{\sqrt{x}} \frac{y}{x} dy$, $\int_0^1 dy \int_0^2 e^{x+y} dx$.

Całka po obszarze normalnym. Obszary w praktyce rzadko są prostokątami.

Definicja 7.2.4. Obszar

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

(ograniczony z lewej i prawej pionowymi prostymi, z dołu i z góry wykresami funkcji ciągłych) nazywamy **obszarem normalnym względem osi x** . Analogicznie $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$ to **obszar normalny względem osi y** .



Twierdzenie 7.2.5. Jeśli f jest ciągła na obszarze normalnym względem osi x , to

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy,$$

a na obszarze normalnym względem osi y :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx.$$

Intuicja: jak ustalić granice

Dla ustalonego x prowadzimy pionową prostą (czerwony odcinek na rysunku): *wchodzi* do obszaru na dolnej krzywej $y = \varphi(x)$ i *wychodzi* na górnej $y = \psi(x)$ – to granice wewnętrznej całki. Granice zewnętrznej całki to najmniejsze i największe x w obszarze. Granice wewnętrznej całki mogą zależeć od zmiennej zewnętrznej; granice zewnętrznej muszą być liczbami.

Przykład 7.2.6. Obliczmy $I = \iint_T (5x^2 - 2xy) dx dy$, gdzie T to trójkąt ograniczony prostą $x + 2y = 2$ i osiami układu.

Krok 1: opis obszaru. Trójkąt ma wierzchołki $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$. Dla $x \in [0, 2]$ pionowa prosta wchodzi do T na osi ($y = 0$) i wychodzi na prostej $y = 1 - \frac{x}{2}$. Zatem $T = \{0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}\}$.

Krok 2: całki iterowane.

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} (5x^2 - 2xy) dy = \int_0^2 (5x^2 y - xy^2) \Big|_{y=0}^{y=1-\frac{x}{2}} dx = \int_0^2 \left(5x^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) - x \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 \right) dx.$$

Po wymnożeniu: $\int_0^2 (6x^2 - x - \frac{11}{4}x^3) dx = (2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{16}x^4) \Big|_0^2 = 16 - 2 - 11 = 3$.

Sprawdzenie w drugiej kolejności. $T = \{0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 2 - 2y\}$, i rachunek (dłuższy – spróbuj!) też daje $I = 3$.

Przykład 7.2.7. Obliczmy $\iint_D (x + y) dx dy$, gdzie D to obszar między parabолą $y = x^2$ a prostą $y = x$. Krzywe przecinają się dla $x^2 = x$, czyli $x = 0$ i $x = 1$; dla $x \in (0, 1)$ mamy $x^2 < x$, więc parabola jest na dole:

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x + y) dy = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}.$$

Zadanie 7.2.8. Oblicz:

- (1) $\iint_T (4 - x - y) dx dy$, gdzie T to trójkąt o wierzchołkach $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(1, 3)$;
- (2) $\iint_D \frac{x}{y} dx dy$, gdzie $D = \{2 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq x^2\}$;
- (3) $\iint_D xy dx dy$, gdzie D jest obszarem między $y = x^2$ a $y = x$;
- (4) pole obszaru między $y = x^2$ a $y = x$ jako całkę $\iint_D 1 dx dy$ (porównaj z metodą z Rozdziału 5).

7.3. Zastosowania całek podwójnych

Twierdzenie 7.3.1 (objętość). Jeśli $\varphi \leq \psi$ są ciągłe na obszarze D , to objętość bryły $\{(x, y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$ wynosi

$$|V| = \iint_D (\psi(x, y) - \varphi(x, y)) dx dy \quad (\text{„górna powierzchnia minus dolna”}).$$

Przykład 7.3.2. Objętość bryły pod paraboloidą $z = 4 - x^2 - y^2$ nad kwadratem $[0, 1] \times [0, 1]$:

$$\int_0^1 dy \int_0^1 (4 - x^2 - y^2) dx = \int_0^1 \left(4 - \frac{1}{3} - y^2 \right) dy = \frac{11}{3} - \frac{1}{3} = \frac{10}{3}.$$

Przykład 7.3.3. Walec o promieniu r i osi pokrywającej się z osią y ma powierzchnię $x^2 + z^2 = r^2$. Obliczmy objętość tej jego części, która leży nad trójkątem $D = \{0 \leq x \leq r, 0 \leq y \leq x\}$ w płaszczyźnie $z = 0$ (pod górną połową walca, $z = \sqrt{r^2 - x^2}$):

$$|V| = \int_0^r dx \int_0^x \sqrt{r^2 - x^2} dy = \int_0^r x \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Wewnętrzna całka była łatwa, bo y w funkcji nie występuje (wynik: $\sqrt{r^2 - x^2} \cdot x$). Zewnętrzną liczymy przez podstawienie $t = r^2 - x^2$, $dt = -2x dx$: $\int x \sqrt{r^2 - x^2} dx = -\frac{1}{3}(r^2 - x^2)^{3/2}$, więc $|V| = 0 - (-\frac{1}{3}r^3) = \frac{1}{3}r^3$.

W laboratorium: liczba komórek w naczyniu

Dno prostokątnej butelki hodowlanej to prostokąt $[0, 10] \times [0, 4]$ (w cm). Z powodu nierównomiernego rozprowadzenia pożywki gęstość komórek rośnie w kierunku osi x : $\rho(x, y) = 1000(1 + \frac{x}{10})$ komórek/cm². Liczba komórek na całym dnie to

$$\begin{aligned} \int_0^{10} dx \int_0^4 1000 \left(1 + \frac{x}{10}\right) dy &= \int_0^{10} 4000 \left(1 + \frac{x}{10}\right) dx \\ &= 4000 \left(x + \frac{x^2}{20}\right) \Big|_0^{10} = 4000 \cdot 15 = 60\,000. \end{aligned}$$

Gdyby gęstość była wszędzie równa wartości na początku butelki (1000/cm²), komórek byłoby 40 000; średnia gęstość wynosi $\frac{60\,000}{40} = 1500/\text{cm}^2$.

Zadanie 7.3.4.

(1) Oblicz objętości brył ograniczonych powierzchniami:

- (a) $x = \pm 1, y = \pm 2, z = 0, z = 6 - x^2 - y^2$;
- (b) $x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 1, z = 1 + x + y$;
- (c) $x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 3, z = 4x^2 + 2y^2$;
- (d) $x = y, x = 2y - 1, x = 5, z = 0, z = 2x + y - 1$.

(2) Na kwadratowej szalce $[0, 2] \times [0, 2]$ (cm) gęstość kolonii bakteryjnych wynosi $\rho(x, y) = 5xy$ kolonii/cm². Ile kolonii jest na szalce?

Odpowiedź: $\int_0^2 \int_0^2 5xy dy dx = 20$.

Powodzenia na egzaminie!