

<http://www.math.uni.wroc.pl/~kraszew>

Funkcja i jej wykres

Zadanie 13. Narysuj (przybliżone) wykresy funkcji

$$2x^6 - 3x^5, \quad x^3 + x, \quad \frac{1}{-x + 3}, \quad (x - 2)(-x + 3)^2.$$

Zadanie 14. Znajdź pierwiastki następujących wielomianów:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6, \quad x^3 + 5x^2 - 9x - 45, \quad -2x^3 - 2x^2 - 6x, \quad x^4 - 34x^2 + 225.$$

Zadanie 15. Naszkicuj w układzie współrzędnych wykres funkcji $f(x) = (x - 2)(x + 3)$. Dla tej funkcji narysuj wykresy funkcji

$$f(-x), \quad f(2x), \quad f\left(\frac{x}{3}\right), \quad f(x - 4), \quad f(|x|), \quad |f(x)|.$$

Zadanie 16. Wyznacz dziedzinę funkcji:

$$a(x) = \frac{x^3 - 1}{x}, \quad b(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad c(x) = \sin \frac{x-1}{x+1}, \quad d(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{(2-x^2)}.$$

Zadanie 17. Określ złożenia funkcji $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$ oraz ich dziedziny, jeżeli

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad g(x) = \frac{1}{x+1}; \quad \text{b) } f(x) = \frac{x+1}{x-2}, \quad g(x) = \frac{2x}{x-4}.$$

Zadanie 18. Dla funkcji $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{x}{1+x}$, $h(x) = \sqrt{x}$, $p(x) = \ln x$, $q(x) = x^2$, znajdź następujące złożenia funkcji:

$$p(q(x)), \quad q(p(x)), \quad f(g(h(x))), \quad g(p(f(q(x))))), \quad h(q(g(f(x))))).$$

Zadanie 19. Przedstaw każdą z poniższych funkcji jako złożenie co najmniej trzech funkcji:

$$5 \sin(\sqrt{x^3}), \quad 2 + \log(\cos(x^2 - 1)), \quad 4 - \sqrt{\left(\frac{x-2}{x^2}\right)^3}, \quad \frac{|x| + 1}{|x|}.$$

Funkcje wykładnicza i logarytmiczna

Zadanie 20. Przedstaw następujące wyrażenia za pomocą logarytmu z pojedynczej liczby:

$$\ln 2 + \ln 3; \quad \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 8); \quad \ln 15 - \ln 3; \quad \ln 20 - \frac{1}{3}(\ln 16 + \ln 4).$$

Zadanie 21. Wyznacz dziedzinę funkcji:

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - 4} - \frac{1}{2x - 1}, \quad g(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} - 1},$$

$$h(x) = \sqrt{2x + 1} + \log(x^2 - 2x), \quad i(x) = \log\left(\frac{x}{x-1} + 1\right) + \sqrt{1 + \log_2 x}.$$

Zadanie 22. Uprość następujące wyrażenia

$$\ln x^3 - \ln x; \quad \ln e^x; \quad \ln e^{x^2+3} - \ln e^x; \quad \ln(x^5 - 3x^2) + 2 \ln x^{-1} - \ln(x^3 - 3).$$

Zadanie 23. Naszkicuj wykresy funkcji:

$$2^{-x} + 1, \quad |2^x - 3|, \quad |\log_2 x|, \quad \log_{\frac{1}{2}} |x|, \quad \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) + 2, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}, \quad 1 - e^x, \quad \ln(1 - x).$$

Zadanie 24. Rozwiąż równania:

$$2^{x-4} \cdot 8^{3-2x} = 4^{3x-3}; \quad 3^{x+1} - 11 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3 \cdot 9^{-x} = -5; \quad 2^{x+2} + 8 \cdot 2^{-2-x} = 6; \quad 7^{5x} - 7^{5x-1} = 6.$$

Zadanie 25. Rozwiąż nierówności:

$$4^{x+1} - 3 \cdot 2^{x+2} < 16; \quad 2^{-x+1} < 4^{x^2}; \quad 5 \cdot 4^x - 4 \cdot 5^{2x} < 10^x; \quad 3^{\frac{x-3}{3x-2}} < \frac{1}{3}.$$

Zadanie 26. Rozwiąż równania:

$$2 \log(x - 3) - \log(x - 2) = \frac{1}{2} \log 0,25; \quad 4 - \log x = 3\sqrt{\log x}; \quad \log^2 x - \log x^3 + 2 = 0; \quad x^{\log x} = 100x.$$

Zadanie 27. Rozwiąż nierówności:

$$\log_2(x + 2) + \log_2(x - 1) > 2; \quad |3 - \log_2 x| < 1; \quad \log_2(x + 2) < 2; \quad 2(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - 9 \log_{\frac{1}{2}} x + 4 > 0.$$

Zadanie 28. Ciśnienie gazu na wysokości h powyżej poziomu morza można obliczyć za pomocą równania barometrycznego

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$$

gdzie M jest masą molową gazu, p_0 – ciśnieniem na poziomie morza a g , T i R to stałe. Wyraż h za pomocą pozostałych zmiennych.

Zadanie 29. pH roztworu wodnego dane jest wzorem $pH = -\log_{10}[H^+]$, gdzie $[H^+]$ to stężenie kationów wodorowych podane w jednostkach $\frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}$. Oszacuj liczbę moli kationów wodorowych w 2,5 litra roztworu, jeśli wiemy, że pH roztworu waha się między 8 i 9.

Zadanie 30. Pewna kultura bakterii podwaja swoją objętość co pół godziny. Napisz równanie na ilość bakterii N w kulturze jako funkcję czasu t zakładając, że na początku było 1000 bakterii. Narysuj wykres.

Zadanie 31. Użycie środka DDT jest zabronione obecnie w wielu krajach z powodu długoterminowego szkodliwego wpływu na środowisko naturalne. Okres połowicznego rozkładu DDT wynosi 12 lat. Farmer w USA rozsypał na swoim polu 20 kg tego środka w 1972 roku. Ile DDT jest jeszcze aktywne? Kiedy ilość aktywnego DDT na polu będzie wynosiła mniej niż 10 gramów?

Zadanie 32. Wprowadzona chora komórka do organizmu zdrowej myszy podwaja się po $\frac{1}{2}$ dnia. Pod koniec dnia te dwie komórki dzielą się na cztery. To podwajanie trwa aż do momentu gdy liczba chorych komórek przekroczy jeden miliard, gdyż wtedy mysz umiera.

a) Napisz równanie na liczbę zakażonych komórek po t dniach.

b) Ile dni żyje mysz od momentu zakażenia?

Liczby zespolone

Zadanie 33. Wykonaj następujące działania na liczbach zespolonych

$$i) (2 + 3i) + (5 - 8i), \quad ii) (1 - i) \cdot (3 + 2i), \quad iii) \frac{3}{i}, \quad iv) \frac{(2-i)}{-i}, \quad v) i^3, \quad vi) i^4, \quad vii) i^6.$$

Zadanie 34. Znajdź pierwiastki następujących równań

$$i) x^2 - 4x + 5, \quad ii) x^3 - 2x^2 + 5x.$$

Jan Kraszewski