

<http://www.math.uni.wroc.pl/~kraszew>

Całka niewłaściwa

Zadanie 65. Oblicz całki niewłaściwie:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}, \quad \int_0^{\infty} e^{-3x} dx, \quad \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx.$$

Równania różniczkowe

Zadanie 66. Znaleźć rozwiązania ogólne (jawne bądź uwikłane) następujących równań różniczkowych.

a) $y' = e^{x+y}$, b) $y' = \frac{\sqrt{x}}{y}$, c) $y' = \frac{\sqrt{y}}{x}$, d) $y' = \frac{y+1}{x+1}$.

Zadanie 67. Znajdź rozwiązania następujących zagadnień początkowych:

- a) $y' = 2$, $y(0) = 2$,
- b) $y' = \frac{y}{x}$, $y(1) = 5$,
- c) $y' = \frac{1}{y^2}$, $y(1) = 3$,
- d) $y' = -y^2 e^x$, $y(0) = \frac{1}{2}$,
- e) $y' = \frac{e^x}{e^y}$, $y(0) = \ln 2$,
- f) $xyy' = \ln x$, $y(1) = 1$,
- g) $yy' = xe^{-y^2}$, $y(0) = 0$,
- h) $yy' = x(1+y^2)$, $y(0) = 1$,
- i) $y' = (2-y)^2 e^x$, $y(0) = 1$.

Zadanie 68. Znaleźć rozwiązania ogólne następujących równań liniowych pierwszego rzędu (metodą czynnika całkującego):

a) $y' + xy = 5x$, b) $y' - 2y = 4x$.

Zadanie 69. (bez kalkulatora) Wiadomo, że szybkość zmian temperatury danego ciała jest proporcjonalna do różnicy między temperaturą tego ciała i temperaturą otoczenia (prawo Newtona). Zakładamy, że $S(0) = 100^\circ\text{C}$ w temperaturze otoczenia 20°C . Po dziesięciu minutach temperatura ciała wynosiła 60°C . Po ilu minutach ciało będzie miało temperaturę 25°C ?

Zadanie 70. (kalkulator może pomóc) Pewna osoba uczy się pisać na maszynie. Niech N oznacza maksymalną liczbę słów jakie potrafi napisać ona napisać w ciągu minuty. Załóżmy, że prędkość zmian N jest proporcjonalna do różnicy pomiędzy N oraz górną granicą 140. Rozsądnym jest założyć, że na początku osoba ta nie potrafiła napisać żadnego słowa (tzn. $N(0) = 0$). Okazało się, że osoba ta potała napisać 35 słów na minutę po 10 godzinach uczenia się.

- a) Ile słów na minutę będzie pisać ta osoba po 20 godzinach uczenia się?
- b) Jak długo musi ona ćwiczyć, aby napisać 105 słów na minutę?

Zadanie 71. (kalkulator może pomóc) Ciało zamordowanego znaleziono o 19:30. Lekarz sądowy przybył o 20:20 i natychmiast zmierzył temperaturę ciała denata. Wynosiła ona $32,6^\circ\text{C}$. Godzinę później, gdy usuwano ciało, temperatura wynosiła $31,4^\circ\text{C}$. W tym czasie temperatura w pomieszczeniu wynosiła 21°C . Najbardziej podejrzana osoba, która mogła popełnić to morderstwo – Jan G., twierdzi jednak, że jest niewinny. Ma alibi. Po południu był on w restauracji. O 17:00 miał krótką rozmowę zamiejscową, po której natychmiast opuścił restaurację. Restauracja znajduje się 5 minut na piechotę od miejsca morderstwa. Czy alibi to jest niepodważalne?

Zadanie 72. (Ciąg dalszy zadania poprzedniego). Obrońca Jana G. zauważył, że zamordowany był u lekarza o 16:00 w dniu śmierci i wtedy jego temperatura wynosiła $38,3^{\circ}\text{C}$. Załóżmy, że taką temperaturę miał on w chwili śmierci. Czy można dalej podejrzewać, że Jan G. popełnił to morderstwo?

Zadanie 73. Znaleźć rozwiązania ogólne równań:

a) $y'' - 4y' + 4y = 0$,

b) $y'' - 3y' = 0$,

c) $y'' + y = 0$,

d) $y'' - 4y' + 13y = 0$,

e) $y'' + 4y = 0$,

f) $y'' - 3y' - 4y = 12$,

g) $y'' + 2y' + y = 5$.

Zadanie 74. Znaleźć rozwiązania szczególne następujących zagadnień początkowych:

a) $y'' + y - 2y = 6$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

b) $y'' - 3y' - 10y = 100$, $y(0) = -10$, $y'(0) = 0$.

Zadanie 75. Równanie różniczkowe $y'' + 5y' + 4y = 8$ jest typowym równaniem, które pojawia się przy badaniu krzywej uczenia się szczura w pewnym eksperymencie psychologicznym. Znajdź rozwiązanie szczególne tego równania spełniające warunki początkowe $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Oblicz granicę tego rozwiązania, gdy $t \rightarrow \infty$.

Zadanie 76. Znaleźć rozwiązania szczególne następującego zagadnienia początkowego:

$x' = -x + y$, $y' = 2x$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

Zadanie 77. (jak starczy czasu) Narząd posiada dwie komory oddzielone membraną. Zakładamy, że lek wstrzykiwany do pierwszej komory może poruszać się pomiędzy komorami, a także opuścić organ przez komorę drugą. Niech x będzie stężeniem leku w komorze pierwszej oraz niech y będzie stężeniem leku w komorze drugiej w czasie t . Dowody eksperymentalne sugerują, że x i y spełniają następujący układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 6x \\ \frac{dy}{dt} = 6x - 7y \end{cases}$$

gdzie x oraz y są funkcjami czasu t w godzinach. Wprowadzono 40 jednostek leku do pierwszej komory, więc $x(0) = 40$ oraz $y(0) = 0$. Znajdź rozwiązanie układu oraz stężenie leku w obu komorach po 6 minutach.

Jan Kraszewski