

Wstęp do matematyki R

Lista zadań nr 1 (na ćwiczenia 13.10.2025)

Ćwiczenia

0. Naucz się alfabetu greckiego w mowie, a zwłaszcza w piśmie.
1. Dla poniższych schematów zdaniowych sprawdź, czy informacja $q = 0$ jest wystarczającą do wyznaczenia ich wartości logicznej. Jeśli tak, to wyznacz tę wartość, jeśli nie – pokaż, że obie wartości są możliwe.
 - (a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$;
 - (b) $q \wedge (p \Rightarrow r)$;
 - (c) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$.
2. Uzasadnij, że wszystkie podane na wykładzie prawa rachunku zdań są tautologiami.
3. Zbadaj, czy poniższe schematy zdaniowe są tautologiami.
 - (a) $p \vee q \Rightarrow p \wedge q$;
 - (b) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$;
 - (c) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$;
 - (d) $(p \Rightarrow q \vee r) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \vee (r \Rightarrow q)$;
 - (e) $p \Rightarrow (\neg q \wedge q \Rightarrow r)$.
4. Niech p, q, r oznaczać zmienne zdaniowe, a p', q', r' ich negacje. Zapisz negacje poniższych schematów zdaniowych bez użycia symbolu negacji $\neg$ (można używać pozostałych spójników oraz p, q, r, p', q', r'). Im krótsze końcowe wyrażenie, tym lepiej.
 - (a) $(q \Rightarrow r \wedge p) \vee \neg r$;
 - (b) $\neg(p \vee r) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$;
 - (c) $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$.
5. Przekształć równoważnie schemat zdaniowy $((\neg q \Rightarrow \neg r) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q) \wedge r)$ do możliwie najprostszej postaci, stosując prawa rachunku zdań.
6. Niech C oznacza czworokąt na płaszczyźnie. Rozważamy zdanie
Jeśli C jest trapezem, o ile jest rombem, to jeśli C jest trapezem, to jest kwadratem.
 - (a) Zapisz schemat rozważanego zdania symbolicznie, stosując oznaczenia:
 t : C jest trapezem, k : C jest kwadratem, r : C jest rombem.
 - (b) Rozstrzygnij w każdym z poniższych przypadków, czy powyższe zdanie jest zawsze prawdziwe, zawsze fałszywe, czy też może być zarówno prawdziwe, jak i fałszywe (w zależności od czworokąta C).
 - (i) C jest trapezem.
 - (ii) C nie jest prostokątem.
 - (iii) C nie jest rombem, lecz jest trapezem.

Zadania

7. Zapisz poniższe zdania symbolicznie (nie chodzi o zapisanie ich schematów zdaniowych!). Dla których liczb naturalnych $n = 0, 1, 2, \dots$ zdania te są **fałszywe**?
 - (a) $(n + 7$ nie jest podzielne przez 4 i $n \geq 20)$ pod warunkiem, że n jest liczbą dwucyfrową podzielną przez 15.
 - (b) To, że n jest nieparzyste jest warunkiem koniecznym do tego, że n jest parzyste.
 - (c) n jest mniejsze od 7, chyba że n jest większe od 10.
 - (d) n jest podzielne przez 3 dokładnie wtedy, gdy n jest podzielne przez 7.

W zadaniach 8–10 **nie należy** skupiać się wyłącznie na strukturze logicznej rozważanych zdań.

8. Zakładamy, że o pewnej liczbie naturalnej n wiemy, że

(i) n jest podzielna przez 4 i

(ii) jeśli n jest podzielna przez 2, to n jest podzielna przez 3.

Czy stąd wynika, że liczba n jest podzielna przez 12? Odpowiedź uzasadnij.

9. O pewnej liczbie rzeczywistej x zakładamy, że

(i) jeśli $x > -1$, to z faktu, że $x > 0$ wynika, że $x > 1$ oraz

(ii) jeśli $x \leq 1$, to $x > -1$.

Czy stąd wynika, że liczba x jest dodatnia? Odpowiedź uzasadnij.

10. Dane są trzy **różne** liczby rzeczywiste x, y, z . Wiadomo, że

(i) *Jeśli x jest większa od y , to z jest większa od x .* oraz

(ii) *Jeśli z jest większa od x , to y jest większa od z .*

Czy stąd wynika, że:

(i) x jest mniejsza od y ?

(ii) z jest mniejsza od x ?

Odpowiedzi uzasadnij.

11. Wiemy, że prawdziwe jest zdanie

Nie jest prawdą, że jeśli Platon założył Akademię, to z faktu, że Arystoteles był uczniem Platona wynika, że Arystoteles nie uczęszczał do Akademii.

(a) Czy Platon założył akademię?

(b) Czy Arystoteles był uczniem Platona?

(c) Czy Arystoteles uczęszczał do Akademii?

12. Niech zapis $\alpha(p, q)$ oznacza schemat zdaniowy, w którym jedynymi zmiennymi zdaniowymi są p i q . Znajdź wszystkie (z dokładnością do równoważności) schematy zdaniowe $\alpha(p, q)$, dla których $p \vee q \Rightarrow \alpha(p, q)$ jest tautologią. Podobnie dla $p \wedge q \Rightarrow \alpha(p, q)$.

(Stwierdzenie z *dokładnością do równoważności* oznacza, że nie rozróżniamy schematów zdaniowych równoważnych, czyli takich, których równoważność jest tautologią.)

13. Ile jest, z dokładnością do równoważności, takich schematów zdaniowych $\alpha(p, q)$, że przy podstawieniu $p =$ „23 jest liczbą pierwszą”, $q =$ „pada deszcz” stają się one zdaniami prawdziwymi bez względu na panujące warunki atmosferyczne?

14. Niech $\varphi(p, q)$ oznacza schemat zdaniowy, zbudowany ze zmiennych zdaniowych p i q oraz spójników logicznych. Mówimy, że schemat $\varphi(p, q)$ jest **spełnialny**, jeśli dla pewnych wartości logicznych zmiennych p i q dostajemy prawdę. Czy prawdziwe jest poniższe stwierdzenie? Odpowiedź uzasadnij.

Jeśli $\psi(p, q) \Rightarrow \varphi(p, q)$ jest tautologią oraz $\neg\varphi(p, q) \Rightarrow \psi(p, q)$ jest spełnialne, to $\varphi(p, q)$ jest spełnialne.

15. Mówimy, że schemat zdaniowy φ jest w postaci **koniunkcyjno-alternatywnej**, gdy jest postaci $\varphi = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$, gdzie $n \geq 1$ oraz dla $i = 1, 2, \dots, n$ mamy $\varphi_i = \varphi_i^1 \vee \varphi_i^2 \vee \dots \vee \varphi_i^{k_i}$, gdzie $k_i \geq 1$ i każde φ_i^m jest zmienną zdaniową lub jej negacją. Przedstaw poniższe schematy zdaniowe w postaci koniunkcyjno-alternatywnej.

(a) $p \vee q \Rightarrow p \wedge q$;

(b) $p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$.