

Wstęp do matematyki R
Lista zadań nr 3 (na ćwiczenia 27.10.2025)

Ćwiczenia

1. Wskaż zbiory $A, B, C, D \subseteq \mathbb{R}$ takie, że $\mathbb{R}^2 \setminus \{\langle 0, 1 \rangle\} = (A \times B) \cup (C \times D)$.
2. Sprawdź, czy dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzą poniższe równości. Jeśli tak – udowodnij to, jeśli nie – podaj odpowiednie przykłady.
 - (a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
 - (b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,
 - (c) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cup B) = C$,
 - (d) $(A \cup B) \times C = (A \cup C) \times (B \cup C)$.
3. Czy istnieją zbiory A, B i C takie, że

$$A \cap B \neq \emptyset \quad \text{i} \quad A \cap C = \emptyset \quad \text{i} \quad (A \cap B) \setminus C = \emptyset?$$

Odpowiedź uzasadnij.

4. Niech Ω będzie przestrzenią, a zbiory A, B i C podzbiorami tej przestrzeni. Niech
$$X = \{x \in \Omega : x \in A \vee (x \in B \Leftrightarrow x \in C)\}.$$

Wyraź zbiór X^c za pomocą zbiorów A, B i C oraz operacji $\cup, \cap, ^c$.

5. Czy dla dowolnych **niepustych** zbiorów A, B i C prawdziwe są zależności
 - (a) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$;
 - (b) $A \not\subseteq B \times C$?

Odpowiedzi uzasadnij.

Zadania

6. Czy istnieją zbiory $A, B \subseteq \mathbb{R}$ takie, że $\mathbb{R}^2 \setminus \{\langle 0, 1 \rangle\} = A \times B$? Odpowiedź uzasadnij.
7. Niech zbiór $A \subseteq [0, 1]^2$ będzie taki, że dla każdego $a \in [0, 1]$ mamy $A_a = [\frac{1}{2}a, 1 - \frac{1}{2}a]$. Wyznacz cięcie A^b dla każdego $b \in [0, 1]$.
8. Dane są zbiory A i B . Rozwiąż równanie $A \cup X = B$.
9. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A i B mamy $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$.
10. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C i D mamy
 - (a) $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow A \setminus D \subseteq B \setminus C$,
 - (b) jeśli A, B, C i D są niepuste, to $A \times B = C \times D \Rightarrow A = C \wedge B = D$. Pokaż, że założenie niepustości jest istotne.
11. Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe dla dowolnych zbiorów A, B i C ? Odpowiedzi uzasadnij.
 - (a) $A \subseteq B \wedge B \in C \Rightarrow A \in C$;
 - (b) $(B \cap C) \cap A = \emptyset \wedge A \cup C \subseteq B \Rightarrow A \cap C = \emptyset$;
 - (c) $A \in B \Rightarrow B \cap \mathcal{P}(A) \neq \emptyset$;
 - (d) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap \mathcal{P}(B) = \emptyset$.

12. Czy warunek $A \subseteq B \vee B \subseteq A$ jest warunkiem dostatecznym do tego, by

$$\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)?$$

A warunkiem koniecznym? Odpowiedzi uzasadnij.

13. Zakładamy, że **niepuste** zbiory A , B i C spełniają zależność

$$(B \cup C) \setminus A = (A \cap B) \setminus C.$$

Podaj **wszystkie** inkluzje (chodzi o inkluzje postaci $X \subseteq Y$), zachodzące pomiędzy zbiorami A , B , C (poza trywialnymi postaciami $X \subseteq X$). Odpowiedź uzasadnij – dlaczego zachodzą wymienione inkluzje i dlaczego są to wszystkie zachodzące inkluzje.