

## Wstęp do matematyki R

### Lista zadań nr 4 (na ćwiczenia 3.11.2025)

-3. Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe dla dowolnych zbiorów  $A$ ,  $B$  i  $C$ ?  
Odpowiedzi uzasadnij.

(c)  $A \in B \implies B \cap \mathcal{P}(A) \neq \emptyset$ ;

(d)  $A \cap B = \emptyset \implies A \cap \mathcal{P}(B) = \emptyset$ .

-2. Czy warunek  $A \subseteq B \vee B \subseteq A$  jest warunkiem dostatecznym do tego, by

$$\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)?$$

A warunkiem koniecznym? Odpowiedzi uzasadnij.

-1. Zakładamy, że **niepuste** zbiory  $A$ ,  $B$  i  $C$  spełniają zależność

$$(B \cup C) \setminus A = (A \cap B) \setminus C.$$

Podaj **wszystkie** inkluzje (chodzi o inkluzje postaci  $X \subseteq Y$ ), zachodzące pomiędzy zbiorami  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (poza trywialnymi postaciami  $X \subseteq X$ ). Odpowiedź uzasadnij – dlaczego zachodzą wymienione inkluzje i dlaczego są to wszystkie zachodzące inkluzje.

1. Dane są trzy **różne** liczby rzeczywiste  $x, y, z$ . Wiadomo, że

(i) *Jeśli  $x$  jest większa od  $y$ , to  $z$  jest większa od  $x$ .* oraz

(ii) *Jeśli  $z$  jest większa od  $x$ , to  $y$  jest większa od  $z$ .*

Czy stąd wynika, że:

(i)  $x$  jest mniejsza od  $y$ ?

(ii)  $z$  jest mniejsza od  $x$ ?

Odpowiedzi uzasadnij.

2. Mamy dane zbiory

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : 2|x \wedge x^2 < 33\},$$

$$B = \{x^2 + x : x \in \mathbb{Z}\} \cap [-1, 6).$$

(a) Wyznacz zbiór  $P(((B \triangle A) \times B) \setminus (A \times (-1, 1])) \setminus \{\emptyset\}$ .

(b) O zbiorze  $X \subseteq \mathbb{Z}$  wiemy, że  $X \triangle A \subseteq X$  i  $X \setminus B \subseteq A$ . Czy te informacje pozwalają na jednoznaczne wyznaczenie zbioru  $X$ ? Odpowiedź uzasadnij.

3. (pożyczone od prof. Nadziei)

Niech  $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Zdefiniujmy zbiór  $A \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$  w następujący sposób:

$$\langle C, D \rangle \in A \Leftrightarrow C \subseteq D.$$

Wyznacz cięcia  $A_\emptyset, A^\emptyset, A_{\{0,1,2\}}, A^{\{0,1,2\}}$ .

4. Rozważmy zbiór  $A = ([1, 3] \times (2, 5]) \cup ([2, 4] \times (1, 3))$ . Ile elementów ma zbiór  $\{A_x : x \in \mathbb{R}\}$ ? Odpowiedź uzasadnij.

**Wskazówka:** Rysunek i zrozumienie pytania niezbędne.

5. Które z poniższych stwierdzeń **są** prawdziwe dla dowolnych zbiorów  $A$ ,  $B$  i  $C$ ?  
Odpowiedzi uzasadnij.

(a)  $A \subseteq B \wedge B \in C \implies A \in C$ ;

(b)  $(B \cap C) \cap A = \emptyset \wedge A \cup C \subseteq B \implies A \cap C = \emptyset$ ;

(c)  $A \in B \implies B \cap \mathcal{P}(A) \neq \emptyset$ ;

(d)  $A \cap B = \emptyset \implies A \cap \mathcal{P}(B) = \emptyset$ .

6. Które z poniższych stwierdzeń **mogą być** prawdziwe dla pewnych zbiorów  $A$  i  $B$ ?  
Odpowiedź uzasadnij.

- (a)  $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ ;
- (b)  $\langle \emptyset, \emptyset \rangle \in \mathcal{P}(A) \times A$ ;
- (c)  $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\} \wedge B \cap A \neq \emptyset$ ;
- (d)  $A \in B \wedge \mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(B)$ .

7. Zakładamy, że **niepuste** zbiory  $A$ ,  $B$  i  $C$  spełniają zależność

$$(B \cup C) \setminus A = (A \cap B) \setminus C.$$

Podaj **wszystkie** inkluzje (chodzi o inkluzje postaci  $X \subseteq Y$ ), zachodzące pomiędzy zbiorami  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (poza trywialnymi postaciami  $X \subseteq X$ ). Odpowiedź uzasadnij – dlaczego zachodzą wymienione inkluzje i dlaczego są to wszystkie zachodzące inkluzje.

8. Czy warunek  $A \subseteq B \vee B \subseteq A$  jest warunkiem dostatecznym do tego, by

$$\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)?$$

A warunkiem koniecznym? Odpowiedzi uzasadnij.

9. (a) Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów  $A$  i  $B$  mamy

$$\{X \cup Y : X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(B)\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B).$$

(b) Czy prawdą jest, że dla dowolnych zbiorów  $A$  i  $B$  mamy

$$\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \{X \cup Y : X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(B)\}?$$

Odpowiedź uzasadnij.

**Wskazówka:** zbiór  $\{X \cup Y : X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(B)\}$  to (zapisany za pomocą operacji) zbiór wszystkich sum zbiorów, w których jeden składnik należy do  $\mathcal{P}(A)$ , a drugi do  $\mathcal{P}(B)$ .