

Wstęp do matematyki R
Lista zadań nr 7 (na ćwiczenia 1.12.2025).

Ćwiczenia

1. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zapisz następujące zdania o funkcji f .
 - (a) Funkcja f jest ograniczona.
 - (b) Do zbioru okresów funkcji f należą dowolnie małe liczby dodatnie.
 - (c) Zbiór miejsc zerowych funkcji f nie jest ograniczony z dołu.
 - (d) Funkcja f nie ma okresów mniejszych od 3.
2. Zapisz następujące zdania o ciągu liczb rzeczywistych $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$.
 - (a) Ciąg $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ jest monotoniczny.
 - (b) Ciąg $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ jest rozbieżny do $+\infty$.
 - (c) Nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ jest dodatnich.
 - (d) Od pewnego miejsca ciąg $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ jest rosnący.
3. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zapisz symbolicznie poniższe zbiory.
 - (a) Zbiór miejsc zerowych funkcji f .
 - (b) Zbiór okresów funkcji f (Uwaga! Okres funkcji jest **dodatnią** liczbą rzeczywistą).
 - (c) Zbiór ograniczeń górnych funkcji f .
4. Rozważmy ciąg $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych oraz funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zapisz symbolicznie poniższe zdania oraz zbiór.
 - (a) Każdy wyraz ciągu $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ jest wartością funkcji f .
 - (b) Wartości funkcji f dla argumentów, będących wyrazami ciągu $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ są dodatnie.
 - (c) Zbiór miejsc zerowych funkcji f , będących wyrazami ciągu $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$.
5. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Zapisz symbolicznie **negacje** poniższych zdań (bez użycia symbolu negacji $\neg$).
 - (a) Liczba 4 jest największą wartością funkcji f .
 - (b) Dla pewnych argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od 4.
6. Podaj przykład funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która:
 - (a) jest surjekcją, ale nie jest injekcją;
 - (b) jest injekcją, a zbiór jej wartości jest ograniczony;
 - (c) zbiór jej wartości jest nieograniczony, a każda wartość jest przyjmowana nieskończenie wiele razy;
 - (d) $\text{rng}(f) = [0, 1)$, a każda wartość jest przyjmowana nieskończenie wiele razy.
7. Niech $f : (-\infty, 0] \rightarrow [0, +\infty)$ będzie zadana wzorem $f(x) = x^2$. Udowodnij, że funkcja f jest bijekcją.
8. Niech funkcje $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą zadane wzorami

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{gdy } x > 0 \\ x + 1 & \text{gdy } x \leq 0. \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{gdy } x \geq 0 \\ x^2 - 1 & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

Wyznacz złożenie $g \circ f$.

9. Wyznacz funkcje odwrotne do poniższych funkcji:
 - (a) $f : (-\frac{1}{2}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(2x + 1)$;
 - (b) $g : (-\infty, 0] \rightarrow [0, +\infty)$, $g(x) = x^2$;
 - (c) $F : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $F(A) = A^T$.

Zadania

10. Dla podanych poniżej funkcji sprawdź, czy są różnowartościowe i czy są „na”. Odpowiedzi uzasadnij.

- (a) $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$; $f(n, k) = n + k$,
- (b) $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$; $f(n, k) = n^2 - k$,
- (c) $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$; $f(n, k) = n^2 - k$,
- (d) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$; $f(n) = \langle 2n, -2n \rangle$,
- (e) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $f(x, y) = \langle x + y, x - y \rangle$,
- (f) $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$; $f(n, k) = (n - 2)2^k$,
- (g) $f : (\mathbb{N}^+)^2 \rightarrow \mathbb{N}$; $f(n, k) = (n - 1)(k + 1)$,
- (h) $f : (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\})^2 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$; $f(A, B) = A \setminus B$,
- (i) $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$; $f(A, x) = A_x$,
- (j) $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$; $F(\varphi)(n) = \varphi(2n)$.

11. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ daną wzorem $f(n, k) = nk + 1$. Podaj przykład nieskończonego zbioru $C \subseteq \mathbb{N}^2$, takiego że funkcja $f|_C$ jest różnowartościowa. Odpowiedź uzasadnij.

12. Dobierz przeciwdziedzinę funkcji $f|_C$, określonej w zadaniu 11, tak by miała ona funkcję odwrotną i wyznacz tę funkcję odwrotną.

13. Niech $f : X \rightarrow Y$ oraz $g : Y \rightarrow Z$. Udowodnij, że

- (a) jeśli f jest różnowartościowa i g jest różnowartościowa, to $g \circ f$ jest różnowartościowa;
- (b) jeśli $g \circ f$ jest różnowartościowa, to f jest różnowartościowa;
- (c) jeśli $g \circ f$ jest różnowartościowa i f jest „na”, to g jest różnowartościowa.

14. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $f(x) = x^2$ oraz niech $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) Załóżmy, że g jest różnowartościowa. Czy $f \circ g$ może być różnowartościowa? A $g \circ f$?
- (b) Załóżmy, że g jest surjekcją. Czy $f \circ g$ może być surjekcją? A $g \circ f$?

Odpowiedzi uzasadnij.

15. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ daną wzorem $f(x) = x^2 - 3x$. Zdefiniuj funkcję $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tak, by funkcja $f \circ g$ była injekcją.

16. Niech funkcja $f : X \rightarrow Y$ będzie bijekcją. Udowodnij, że $f^{-1} \circ f = id_X$, $f \circ f^{-1} = id_Y$.