

Wstęp do matematyki R
Lista zadań nr 9 (na ćwiczenia 15.12.2025).

1. Podaj przykłady funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o następujących własnościach:
 - (a) dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zbiór $f^{-1}[\{x\}]$ jest nieskończony;
 - (b) zbiór $f^{-1}[(-1, 1)]$ jest dwuelementowy;
 - (c) $f^{-1}[[0, 1]] = \mathbb{R}$;
 - (d) $f[[0, 1]] = f[[3, 5]]$;
 - (e) $f^{-1}[[2, 3]] = [-1, 1]$ i $f(-1) = f(1)$.
2. Narysuj graf relacji R na zbiorze $X = \{1, 2, 3, 4\}$ takiej, że
 - (a) R jest zwrotna, nie jest symetryczna i nie jest słabo antysymetryczna;
 - (b) R jest symetryczna, przechodnia i $2R3$;
 - (c) R jest przeciwzwrotna, przechodnia i ma przynajmniej 3 elementy;
 - (d) R jest zwrotna, symetryczna, przechodnia i nie jest relacją równości;
 - (e) R jest przechodnia, słabo antysymetryczna i spójna;
 - (f) R jest przechodnia, nie jest zwrotna, nie jest przeciwzwrotna, nie jest symetryczna;
 - (g) R jest zwrotna, symetryczna, nie jest przechodnia;
 - (h) R jest spójna, nie jest słabo antysymetryczna;
 - (i) R jest przechodnia, nie jest słabo antysymetryczna, ma parzystą liczbę elementów.
3. Niech R będzie relacją pustą, a S relacją pełną na zbiorze $\mathbb{N}$. Które z opisanych na wykładzie własności mają te relacje i dlaczego?
4. Niech R, S, T będą relacjami w zbiorze X . Udowodnij, że
 - (a) $R \subseteq R^{-1} \Leftrightarrow R = R^{-1}$;
 - (b) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$;
 - (c) $(R \circ T) \setminus (S \circ T) \subseteq (R \setminus S) \circ T$;
 - (d) R jest relacją przechodnią $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$.
5. Niech R będzie relacją w zbiorze $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, zadaną warunkiem $xRy \Leftrightarrow |x - y| = 0 \vee |x - y| = 2$.
 - (a) Jakie własności ma relacja R ?
 - (b) Wyznacz relacje $R^2 = R \circ R$ i $R^3 = R^2 \circ R$.
6. Udowodnij, że każda przeciwzwrotna i przechodnia relacja w zbiorze $\mathbb{N}$ jest silnie antysymetryczna.
7. Niech T_1 i T_2 będą relacjami zwrotnymi w zbiorze $\mathbb{N}$. Czy $T_1 \setminus T_2$ jest relacją zwrotną? A relacja $T_1 \cap T_2$?
8. Dla podanych zbiorów X i relacji R w X sprawdź, czy R jest relacją równoważności:
 - (a) $X = \mathbb{Z}$; $xRy \Leftrightarrow 2|(x + y)$,
 - (b) $X = \mathbb{Z}$; $xRy \Leftrightarrow 3|(x + y)$,
 - (c) $X = \mathbb{R}$; $xRy \Leftrightarrow x - y > 1$,
 - (d) $X = \mathbb{R}$; $xRy \Leftrightarrow |x - y| \leq 2$,
 - (e) $X = \mathbb{N}^2$; $\langle n_1, m_1 \rangle R \langle n_2, m_2 \rangle \Leftrightarrow 2|(n_1 + n_2) \wedge 2|(n_1 + m_1 + n_2 + m_2)$,
 - (f) $X = \mathbb{R}^2$; $\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle \Leftrightarrow x_1 = x_2$,
 - (g) $X = \mathbb{R}^2$; $\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle \Leftrightarrow x_1 = y_2$,
 - (h) $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$; $fRg \Leftrightarrow f(0) = g(0)$,
 - (i) $X = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$; $ARB \Leftrightarrow A \cap \{1, 4\} = B \cap \{1, 4\}$,
 - (j) $X = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$; $ARB \Leftrightarrow (\mathbb{N} \subseteq A \Leftrightarrow \mathbb{N} \subseteq B)$,
 - (k) $X = \{x \in \mathbb{Z} : 0 < |x| \leq 4\}$; $xRy \Leftrightarrow xy > 0$.

Dla tych relacji R , które są relacjami równoważności, opisz zbiór ilorazowy X/R .

9. Podaj przykład relacji równoważności R na zbiorze $\mathbb{N}$, spełniającej warunki (a)-(c):
(a) $1R2$; (b) $\neg(2R3)$; (c) relacja R ma trzy klasy abstrakcji.
10. Sprawdź, czy dla dowolnych relacji równoważności R i S na zbiorze X relacje $R \cup S$ i $R \cap S$ są relacjami równoważności na X . Odpowiedź uzasadnij. Jeśli tak, to opisz ich zbiory ilorazowe.